**Números negativos e as operações de multiplicação e divisão**

**Objetivo(s)**

Realizar cálculos com números negativos envolvendo multiplicação e divisão

**Conteúdo(s)**

Multiplicação e divisão

**Ano(s) :** 7º,8º e 9º

**Tempo estimado:** 9 aulas

**Desenvolvimento**

**1ª etapa**

Levando em conta que a turma já sabe resolver problemas que envolvem adições e subtrações de números negativos, você pode trabalhar com somas algébricas e simplificações das escritas. Para efetuar a simplificação, há duas maneiras:

a) (+2) + (-5) + (+4) = (+2) - (+5) + (+4) = 2 - 5 + 4

Transformando todos os números em números positivos.  Nesse caso, o sinal - que sobra é um sinal de subtração.  
  
b) (+2) + (-5) + (+4) = +2 - 5 +4 = 2 - 5 + 4

Retirando os sinais de adição e parênteses. Retirando o sinal + do número +2, os sinais que permanecem são sinais posicionais.  
  
Os únicos sinais + são sinais de adição. Ou seja, (+2) + (-5) + (+4) escreve-se 2 + (-5) + 4. Transformando a adição em subtração, temos 2 - 5 + 4. Os únicos sinais que permanecem são sinais de operação, exceto no caso onde a soma algébrica começa com um número negativo.  
Proponha, então, somas de vários relativos:

* Média de temperaturas, com temperaturas opostas
* Somas algébricas ou somas de vários relativos
* Deslocamento de elevador.

Por exemplo, descreva oralmente os movimentos do elevador "sobe 7 andares, desce 3 andares..." Eles devem tomar nota e resumir a sequência de deslocamentos. Por exemplo: 7 + (-3) + 2 + (-6) + 5 + …. Ou 7 - 3 + 2 - 6 + 5 …… Desafie-os também a escolher um número, adicionar 7, subtrair 9, adicionar -2, subtrair -4. "Por que encontramos o número inicial?" E, por fim, a calcular 1.243 - 35 + 34 etc. Dessa vez, os cálculos são interpretados como uma soma algébrica de números relativos. A ideia aqui é compreender que para realizar uma sequência de adições e subtrações de números relativos podemos transformá-la em uma sequência de adições. Assim, os opostos se neutralizam e podemos reagrupar os negativos entre eles e os positivos entre eles.

**2ª etapa**

Apresente os seguintes problemas de cálculo:

|  |  |
| --- | --- |
| Problema 1: Escolher um número, pegar o seu oposto e adicionar 10. | Problema 2: Escolher um número e subtrair 10. |

Realize os dois cálculos com os números 7, 15, -4 e -27. O que é possível observar comparando todos? É esperado que os alunos escrevam os dois problemas utilizando expressões numéricas: a notação oposto(x) + 10 para o problema 1 e 10 - x para o problema 2. A turma deve notar que 10 - x = 10 + oposto(x), utilizando a definição da subtração de dois relativos. Assim, é possível demonstrar que os dois problemas são iguais. Feito isso, introduza a noção de (-x), propondo a seguinte justificativa: Quando os números negativos foram introduzidos, tínhamos 7 - 9 = 5 - 7 = 3 - 5 =…= 0 - 2= -2 . Do mesmo modo: x + oposto(x) = 0. Então oposto(x) = 0 - x = -x. Nesse momento, é importante chamar a atenção para a mudança de status do sinal de menos, que de sinal de subtração passa a ser o símbolo do oposto de um número. Voltando para os problemas, agora já é possível escrever: 10 - x = 10 + (-x) = -x + 10. Proponha que todos preencham o quadro:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | 3 | -4 |  |  | -0,2 |
| -x |  |  | 7 | 1,5 |  |

Chame a atenção sobre o fato de que - x pode ser positivo quando x for negativo.

**3ª etapa**

Conte aos estudantes que daqui em diante o objeto de estudo será o produto de dois números negativos. Proponha que completem as seguintes igualdades:  
  
-3 + (-3) + (-3) + (-3) + (-3) =  
-5 + (-5) + (-5) =  
-2,3 + (-2,3) + ............... + (-2,3) + (-2,3) =  
*100 termos*  
0 x 2 =  
0 x (-3) =  
  
Provavelmente, eles começarão pela adição para, em seguida, perceber que é mais rápido utilizar a multiplicação entre positivos, pois já sabem fazê-la, e depois colocar o sinal - diante do resultado. Essa observação permite que encontrem a soma dos 100 termos calculando 2,3 x 100 = 230, sem realizar a adição e dando a resposta -230.  
Alguns ficam surpresos ao descobrir que as regras de sinais da adição não são válidas para a multiplicação. Por exemplo, o resultado de (-3) x 5 é negativo, mesmo 5 sendo maior que 3. Ao mesmo tempo, eles admitem sem dificuldade que o produto de qualquer número por 0 é igual a 0, como acontece com os positivos que conhecem.

**4ª etapa**

Peça os cálculos:  
**(-3) x 6 =  
3 x (-6) =  
(-4,2) x 8 =**  
  
Os alunos têm condições de prever o resultado, porque podem, como aprenderam na etapa anterior, substituir mentalmente cada multiplicação por uma adição repetida que eles conhecem: 6 vezes (-3), 3 vezes (-6), 8 vezes (-4,2).

**5ª etapa**

Apresente uma multiplicação que não pode ser substituída por uma adição repetida, pois nenhum dos fatores pode desempenhar o papel de "número da vez". Por exemplo: 4,2 x (- 8). Os estudantes tendem a presumir facilmente o resultado. Trata-se, então, de provar que é -33,6. Diga a eles que estendam a distributividade da multiplicação em relação à adição ao conjunto de números que conhecem e que o produto por 0 dê 0 como já sabemos. Tendo em vista essas propriedades, é possível demonstrar a hipótese sobre o resultado de 4,2 x (-8). Faça a demonstração no quadro, buscando a participação de todos. Escreva: "Sabemos que 4,2 x 8 = 33,6 e presumimos que 4,2 x (- 8) = - 33,6. A hipótese consiste em dizer que esses dois números são opostos. Fazemos a verificação calculando a soma: 4,2 x 8 + 4,2 x (-8).

Como mantemos a distributividade da multiplicação em relação à adição, podemos fatorar: 4,2 x 8 + 4,2 x (-8) = 4,2 x [(-8) + 8] = 4,2 x 0 = 0. Esses dois números são opostos, pois a soma deles é zero. Assim, a hipótese está provada".  
  
Você pode propor também uma segunda demonstração se os alunos estiverem familiarizados com a introdução de números negativos exposta acima, ou seja, se eles substituírem facilmente -8 por 0 - 8. Essa demonstração usa a distributividade da multiplicação em relação à subtração. A ideia é substituir (-8), com o qual não sabemos calcular, pelo número positivo 8, utilizando a possibilidade de substituir (-8) pela diferença 0 - 8, o que faz mudar a natureza do sinal - :  
4,2 x (-8) = 4,2 x (0 - 8) = 4,2 x 0 - 4,2 x 8 = 0 - 33,6 = -33,6

**6ª etapa**

Desafie o grupo a apresentar o resultado de (-5) x (-3). Reúna as hipóteses apresentadas pela classe, geralmente 15 e -15:  
-15 = 5 x (-3) = (-5) x 3  
15 = 5 x 3  
  
Eles são números opostos. Explique para o grupo que é necessário provar qual dos dois resultados é o correto. Monte duplo e oriente a turma a investigar. Com a ajuda da propriedade distributiva, os estudantes provavelmente vão notar que a segunda hipótese é a correta. Se isso não acontecer, ajude os alunos com base nas hipóteses deles:

* Se (-5) x (-3) = -15, é preciso que, ao adicionar esse número a 15 = 5 x 3, o resultado seja 0.
* Se (-5) x (-3) = 15, é necessário que, ao adicionar esse número a -15 = 5 x (-3) = (-5) x 3, o resultado seja 0.

A busca de uma solução permite chegar a um acordo sobre o cálculo a ser feito usando a distributividade para fatorar a soma (-5) x (-3) + (-5) x 3 = (-5) x [(-3) + 3] ou então, (-5) x (-3) + 5 x (-3) = [(-5) + 5] x (-3) ou ainda, se alguns começaram assim, podemos calcular também [(-5) = 5] x (-3) ou com base no efeito da multiplicação por 0 apresentada anteriormente, podemos escrever:

-5 x (-3) = -5 x (0 - 3) = -5 x 0 - (-5) x 3 = 0 - (-15) = 0 + 15 = 15

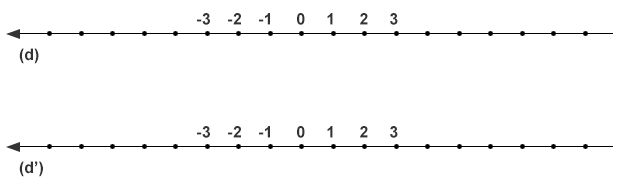
Em todos os casos, encontramos 15 e não -15, resultado que pode parecer evidente para muitos. Feito isso, encaminhe a garotada para a elaboração de um resumo do que foi aprendido sobre o produto de dois números até o momento. É esperado que o grupo escreva algo como: "Para multiplicar dois números relativos, multiplicamos os valores numéricos e para encontrar o sinal do produto aplicamos as seguintes regras:  
- o produto de dois números positivos é positivo.  
- o produto de um positivo e de um negativo é negativo.  
- o produto de dois negativos é positivo" .

**7ª etapa**

Peça a resolução dos seguintes cálculos e questione o que podemos notar sobre o resultado do produto de um número por (-1)?  
**(-1) x  3 =  
(-1) x (-4) =  
(-3,2) x (-1) =  
7,6 x (-1) =  
(-1) x  (-1) =  
(-1) x  0 =  
(-1) x  1 =**  
  
É importante os estudantes observarem que o produto de um número multiplicado por (-1) é o oposto desse número. É possível demonstrar isso de outra forma, presumindo que é o oposto de *x*.  
  
Para se certificarem, podem fazer a adição:  
*x* x (-1) + *x* = x x (-1) + *x* x 1 =*x* x [(-1) + 1] = *x* x 0 = 0  
Portanto,*x* x (-1) é o oposto de *x*.  
  
Lembre-se de que essa propriedade da multiplicação por (-1) é muito útil para demonstrar resultados em álgebra, principalmente:  
-3 *x* = (-3) x *x*, mas também -3 *x* = (-1) x 3 x *x* = 3 x (-1) x *x* = 3 x (-*x*)  
Ou (-*x*) x (-y) = (-1) x *x* x (-1) x y = (-1) x (-1) *x* x x y = *x* x y  
Ou ainda - (*x* + 2) = (-1) x (*x* + 2) = (-1) x 2 = *-x* + (-2).  
Ou ainda - (*x*+2) = (-1) x (*x*+2) = (-1) x *x* + (-1) x 2 = -*x +* (-2).  
  
Nessa etapa, converse também com o grupo sobre os status do sinal de menos. Ele pode ser o sinal da subtração, o sinal dos números negativos e o sinal que designa o oposto.

8ª etapa

Vamos trabalhar a questão da multiplicação de menos por menos com uma ilustração geométrica:



Entregue uma cópia do desenho acima para cada aluno. Se acrescentarmos o ponto A da abscissa 1 na reta (d) o ponto A’ deverá ter, como abscissa, o produto de 1 por (-1) na reta (d’). Peça que continuem acrescentando cada ponto de abscissa inteira a seu produto por (-1). A multiplicação por (-1) corresponde a uma simetria central: todos os segmentos se interceptam no centro de simetria. Um ponto de (d) e seu simétrico em (d’) têm abscissas opostas. Esse desenho ilustra que a multiplicação por (-1) dá o oposto do número inicial. É possível fazer essa transformação em uma única reta, associando um ponto da reta com o ponto cuja abscissa é seu produto por (-1). O centro de simetria seria o ponto de abscissa 0. Porém, decidiu-se dobrar a reta para dar mais legibilidade.

**9ª etapa**

Desafie os estudantes a verificar a seguinte igualdade: a, b, c são 3 números tais que  
a x b x c = -100. Há números que comprovam essa igualdade? Os valores podem ser descobertos sem procurarmos os valores de a, b, c:

a x 2 x b x (-5) x c  
a x (-6) x c x b  
(-a) x b x c  
(-a) x (-b) x c  
a x b x c + 1  
a x c x a x b x a x c x b  
a x 2 x c x 2 x b x2 x a  
  
O objetivo da atividade é trabalhar não somente as propriedades da igualdade mas a associatividade e a comutatividade da multiplicação. Os alunos podem encontrar várias soluções, como 5 x 2 x (-10) e (-10) x (-10) x (-1).  
As duas últimas expressões são problemáticas, porque o resultado ainda tem uma letra. Isso costuma espantar os estudantes, embora eles já devam estar habituados que um resultado nem sempre é um número.  
Note que há um progresso ao se escrever o resultado na forma de - 200 a: basta saber o valor de a para encontrar o resultado, sendo que antes era preciso a, b, e c.

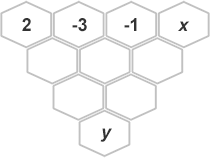
**10ª etapa**

Desafie a classe a solucionar uma série de questões:  
  
**1. Encontre o sinal sabendo que a, b e c são números relativos não nulos. E que a e b são números negativos e c é um número positivo.**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | É sempre positivo | É sempre negativo | Depende |
| a x b |  |  |  |
| ac |  |  |  |
| abc |  |  |  |
| a² = a x a |  |  |  |
| c² |  |  |  |
| -a |  |  |  |
| -c |  |  |  |
| ax (-c) |  |  |  |
| a + b |  |  |  |
| b + c |  |  |  |

Essa tarefa pode ser difícil para a turma, mas importante porque permite reutilizar a notação (-a) e faz com que os alunos lancem mão da regra dos sinais com exemplos literais. Você pode propor que a atividade seja realizada em duplas.

**2. Observe o desenho e prove que se *x* é negativo, y também é. Expresse y em função de *x*.**



**3. Sabendo que a = (-3) e b = (-4), calcule:**  
a + b =  
a - b =  
ab =  
a² = a x a  
-a =  
2a =  
2a + 3b + 7 =  
  
A moçada pode apresentar dificuldades para usar -(-3). É bom lembrar que o sinal (-) nesse caso significa o oposto de (-3). Vale também questionar se para calcular 2a, é válido recolocar o sinal x. Alguns estudantes que não pensam em colocar o sinal x confundem o cálculo com a subtração 2-3.  
  
**4. Utilizando os números -4, -1, 2, 3, -10 e -6, encontre -100.**  
Alguns exemplos de soluções:  
  
(3 - (-1) - (-6)) x (-10)  
(3 x 2 - (-4)) x (-10)  
(-1 + 3 - (-4) x 2) x (-10)  
(-4 - (-6)) x (2 + 3) x (-4)  
(3 x 2 + (-4) x (-1)) x (-10)  
  
Caso alguém encontre expressões que resultam em 100, podemos lembrar da multiplicação por (-1), que dá o oposto.  
  
**5. Se pegamos um número, multiplicamos por 2 e adicionamos (- 10), encontramos 20. Sabendo isso, qual é o número inicial?**  
  
**11ª etapa**  
Antes de abordar o quociente com números negativos, é importante rever essa noção com números positivos. Peça que a garotada complete as igualdades seguintes com um valor exato:  
2 x….= 54  
….. x 3 = 2.004  
5 x….. = 14  
4 x  …..= 1  
….. x 0,4 = 3,2  
3 x …..= 4  
  
As dificuldades costumam ser sempre as mesmas. Para 4 x ...= 1, por exemplo, os estudantes dizem que é impossível, pois 1 é menos que 4. Essa é uma concepção da multiplicação como uma operação que aumenta sempre. Certamente uma consequência da introdução da multiplicação de inteiros como uma adição repetida. Para 3 x ...= 4, eles propõem soluções decimais: 1,33; 1,333. É preciso voltar ao status de número da fração 4/3 , destacando que ele é aquele que, multiplicado por 3, resulta em 4: 3 x 4/3 = 4 . Ou seja, é o quociente de 4 por 3.

**11ª etapa**

Oriente a garotada a completar as igualdades seguintes com um valor exato:  
(-3) x ... = (-36)  
... x 4 = (-12)  
(22) x ... = 18  
... x 5 = (-16)  
(-10) x ... = 3  
(-0,2) x ... = (-7)  
3 x ... = (-4)  
(-6) x ... = 11  
(-9) x ... = (-7)  
  
As primeiras igualdades têm como solução um número decimal ou inteiro que obtemos fazendo uma divisão. A regra dos sinais da multiplicação ajuda a determinar o sinal da solução. Generalizando, eles devem deduzir a regra dos sinais para a divisão de dois números relativos e notar que é a mesma da multiplicação. Para os três últimos, a solução não é um decimal e, por isso, encontram as dificuldades da etapa precedente.  
Dê a definição de -4/3 , de 11/-6 e de -7/-9 como quocientes, sem tocar nos sinais por enquanto. É importante destacar que para dividir dois números relativos é necessário dividir as partes numéricas e levar em conta que a regra dos sinais é a mesma que a da multiplicação. Por exemplo: (- 36) dividido por  (- 3) = 12 e 18 dividido por (-2) = 9 e **- 4/3** é o quociente de (-4) por 3.

**Avaliação**

Desafie o grupo a completar as igualdades abaixo. Em cada caso, é preciso dar o número que falta na forma decimal e na fracionária também:  
(-3) x …..= (-36)  
3 x ….= 36  
3 x ….= (-36)  
(-3) x …..= 36  
  
Encaminhe uma conversa para explicar que é possível deduzir que:

 Equação 1

e

 Equação 2  
Mas, como

 Equação 2

Temos:

 Equação 2

Se admitirmos que a regra da simplificação das escritas fracionárias se estende para os números negativos, é possível provar também que:

 Equação 2

e que

 Equação 2

Aproveite a ocasião para conferir novamente a ideia: "Se multiplicamos um número por -1 obteremos seu oposto".  
  
Encerre o trabalho pedindo que a turma registre a regra dos sinais para os quocientes de números relativos:

 Equação 2

  denomina um número positivo.

E

 Equação 2

- 36/3 = 36/-3 denomina um número negativo.

Portanto,

 Equação 2

***Fonte****: Texto Enseigner les Nombres Négatifs au Collège, elaborado pelo Instituto de Pesquisas no Ensino de Matemática (Irem, sigla em francês) da Aquitânia, na França.*

**Fonte:novaescolaclube**