**Os diversos usos da fatoração de números naturais**

**Objetivo(s)**

* Usar o Teorema Fundamental da Aritmética e a decomposição em fatores primos além da determinação do mínimo múltiplo comum (MMC) e do máximo divisor comum (MDC) de números inteiro
* Aplicar o resultado do MMC e do MDC
* Explorar critérios de divisibilidade
* Usar a decomposição em fatores primos no cálculo de raízes quadradas
* Usar a unicidade da decomposição em fatores primos para justificar que alguns números são irracionais

**Conteúdo(s)**

* Decomposição de números em fatores primos.

Ano(s) : 8º

**Tempo estimado :** 4 aulas

**Desenvolvimento**

**1ª etapa**

Retome o processo de decomposição em fatores primos. Enfatize que a fatoração consiste em escrever como um produto. Faça algumas decomposições de números naturais em fatores primos. Se necessário, retome o significado de número primo e também o fato de que uma potência é apenas uma representação sintética de um produto em que os fatores são todos iguais. Escolha alguns números e proponha que os alunos os fatorem com números primos. Peça que troquem entre eles os resultados das decomposições desafiando-os a encontrar duas decomposições distintas para um mesmo número natural. O objetivo é lavá-los a concluir que isso não existe. Explique que essa unicidade da decomposição em fatores primos é um fato muito importante, e é justamente o que afirma o Teorema Fundamental da Aritmética. Enuncie o Teorema Fundamental da Aritmética ("Todos os números inteiros positivos maiores que 1 podem ser decompostos num produto de números primos, sendo essa decomposição única.").

**2ª etapa**

Retome os conceitos de divisores de um número natural. Mostre, por meio de exemplos, que dizer que um número primo é divisor de um número natural é equivalente a afirmar que esse primo aparece na decomposição em fatores primos desse número (fato1). Use a decomposição em fatores primos para mostrar essa equivalência. Exemplos:  
  
a) 7 divide 441, pois http://rede.novaescolaclube.org.br/sites/default/files/importadas/img/mat/e1.png e há um fator 7 no numerador que pode ser cancelado com o número 7 do denominador.

b) 7 não divide 324, pois http://rede.novaescolaclube.org.br/sites/default/files/importadas/img/mat/e2.png e então a fração http://rede.novaescolaclube.org.br/sites/default/files/importadas/img/mat/e3.png já é irredutível e não pode ser reduzida a uma fração equivalente de denominador 1. Assim http://rede.novaescolaclube.org.br/sites/default/files/importadas/img/mat/e3.png não tem como resultado um número inteiro.  
  
Usando a ideia da decomposição de números primos - e o fato de ela só se realizar de forma única - peça que os estudantes investiguem o que deve ocorrer na decomposição de dois números compostos, a e b, para que a seja divisível por b. Para isso proponha que verifiquem, por exemplo, se 384 é divisível por 18.  
  
Assim, podem concluir que:  
  
http://rede.novaescolaclube.org.br/sites/default/files/importadas/img/mat/e4.png  
  
E pelo fato anterior (fato1) apresentado, podem concluir que a divisão não é exata.  
Peça que a turma elabore um critério, baseado na decomposição em fatores primos, para decidir se um número pode ser dividido por outro. Por fim, faça a observação de que a decomposição em fatores primos fornece um método alternativo para a própria operação de divisão, e peça que eles efetuem divisões usando esse método.

**3ª etapa**

Retome o uso da decomposição em fatores primos para o cálculo do MMC. Apresente o exemplo:

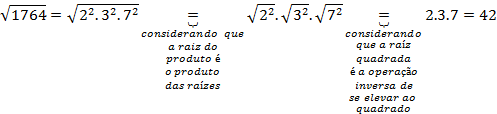
|  |  |
| --- | --- |
| 77, 132 | 2 |
| 77, 66 | 2 |
| 77, 33 | 3 |
| 77, 11 | 7 |
| 11, 11 | 11 |
| 1,1 |  |

MMC (77;132)=2².3 .7.11=924  
  
Solicite que os estudantes calculem o MMC de (35;45) e de (132;165). Depois, apresente a decomposição em fatores primos de dois números grandes: A=7 .13 .97⁴ e B=3 .59 .83 . 127³ e peça que eles escrevam a decomposição em fatores primos do MMC de A e B. É esperado que identifiquem que o MMC é a multiplicação A X B.

**4ª etapa**

Retome o conceito de MDC e questione a sala sobre a diferença entre ele e o MMC. Em seguida, com o objetivo de chamar a atenção dos jovens para a importância de entender o que está por trás desses dois procedimentos, desafie-os a resolver este problema: Num Grande Prêmio de Fórmula 1, o piloto brasileiro completava uma volta na pista a cada 84 segundos. Mas o piloto alemão, com um carro mais rápido, dava uma volta a cada 66 segundos. Considerando que largaram juntos, quanto tempo depois eles passaram juntos novamente pelo ponto de partida? Nesse momento, quantas voltas cada um completou?

5ª etapa

Retome com a garotada o conceito de raiz quadrado. Use a ideia de que extrair raiz quadrada é a operação inversa de elevar um número ao quadrado. Por meio de exemplos, aborde também que a raiz quadrada de um produto é o produto das raízes quadradas, ou seja, http://rede.novaescolaclube.org.br/sites/default/files/importadas/img/mat/e4.png, sendo a e b números reais positivos. Abordados esses fatos, proponha que os alunos calculem http://rede.novaescolaclube.org.br/sites/default/files/importadas/img/mat/e5.png, e que para isso escrevam o radicando como um produto de primos usando a decomposição em fatores primos. Assim,http://rede.novaescolaclube.org.br/sites/default/files/importadas/img/mat/e6.png. Auxilie a moçada a usar os fatos abordados anteriormente para concluir que  
  
  
  
Em seguida, usando a decomposição em fatores primos, proponha que os estudantes calculem a raiz quadrada de números naturais cujos expoentes dos números primos na decomposição (em fatores primos) sejam números pares diferentes de 2. Peça, por exemplo, que calculem http://rede.novaescolaclube.org.br/sites/default/files/importadas/img/mat/e8.png. Para isso lembre-os de que uma potência pode ser decomposta em um produto de potência de mesma base. Assim, 2⁴=2².2² e 3⁴=3².3². Então,  
  
http://rede.novaescolaclube.org.br/sites/default/files/importadas/img/mat/e9.png  
  
Em seguida, oriente que investiguem a relação entre os expoentes da decomposição em fatores primos de um número natural e o fato de esse número ter uma raiz quadrada que seja também um número natural. Peça que enunciem uma condição para que um número natural tenha raiz quadrada exata, isto é, também natural.  
Apresente vários números naturais para que os alunos decidam quais deles têm raiz quadrada também natural (ou exata) e, para esses, peça que extraiam os valores das raízes quadradas.

**6ª etapa**

Nos anos finais do Ensino Fundamental, geralmente se faz a construção do conjunto dos números Reais, apresentando aos alunos um conjunto até então desconhecido: o conjunto dos números Irracionais. Nesse contexto, o Teorema Fundamental da Aritmética pode ser utilizado para demonstrar que alguns números são irracionais, bem como para estabelecer um critério, baseado na decomposição em fatores primos, para decidir quais raízes quadradas são racionais e quais são irracionais.  
  
Para esclarecer que existem números que não podem ser escritos como a razão entre dois números inteiros, analise com os alunos o número http://rede.novaescolaclube.org.br/sites/default/files/importadas/img/mat/e10.png. Explique que vocês deverão investigar quais as consequências do fato de http://rede.novaescolaclube.org.br/sites/default/files/importadas/img/mat/e10.png ser um número racional. Assim, comece supondo que http://rede.novaescolaclube.org.br/sites/default/files/importadas/img/mat/e14.png, com a e b inteiros. Argumente que √7=a/b implica que http://rede.novaescolaclube.org.br/sites/default/files/importadas/img/mat/e12.png, ou ainda que http://rede.novaescolaclube.org.br/sites/default/files/importadas/img/mat/e13.png. Assim, se http://rede.novaescolaclube.org.br/sites/default/files/importadas/img/mat/e10.png fosse racional, teríamos http://rede.novaescolaclube.org.br/sites/default/files/importadas/img/mat/e14.png. Relacione esta última igualdade com o Teorema Fundamental da Aritmética: se 7 aparecer na decomposição em fatores primos de a, então ele aparecerá com expoente par na decomposição em fatores primos de a² (o segundo membro da igualdade). Por outro lado, o número 7 sempre aparecerá com expoente ímpar no número que fica no primeiro membro da igualdade (mostre que isso acontece se 7 aparecer ou não na decomposição em fatores primos de b). Dessa forma, teríamos um mesmo número inteiro com duas decomposições distintas em fatores primos, o que é incompatível com o Teorema Fundamental da Aritmética. Explique que o fato de o número http://rede.novaescolaclube.org.br/sites/default/files/importadas/img/mat/e10.png ser racional implicaria a negação de um fato reconhecidamente verdadeiro - que a decomposição em fatores primos de um número é única - e, por isso, http://rede.novaescolaclube.org.br/sites/default/files/importadas/img/mat/e10.pngé irracional.  
  
Em seguida, proponha que os alunos demonstrem que √3 e √11 também são irracionais. Peça que generalizem esses resultados mostrando que √p é sempre irracional se p for primo.  
  
Na sequência das atividades, peça que avaliem se alguns números compostos como http://rede.novaescolaclube.org.br/sites/default/files/importadas/img/mat/e18.png e http://rede.novaescolaclube.org.br/sites/default/files/importadas/img/mat/e19.png são racionais ou irracionais. Supondo inicialmente que são racionais, os alunos devem novamente concluir que haveria uma mesmo número com duas decomposições distintas em fatores primos, e que, portanto, esses números não podem ser racionais.  
  
Por fim, peça que os alunos verifiquem se números como http://rede.novaescolaclube.org.br/sites/default/files/importadas/img/mat/e20.png são racionais ou não. Nesse caso, usando a decomposição em fatores primos, eles devem ser auxiliados a concluir que http://rede.novaescolaclube.org.br/sites/default/files/importadas/img/mat/e21.png. Depois, supondo que http://rede.novaescolaclube.org.br/sites/default/files/importadas/img/mat/e22.png pode ser escrito como a razão http://rede.novaescolaclube.org.br/sites/default/files/importadas/img/mat/e23.png com a e b inteiros, a turma deve caminhar no sentido de concluir que se http://rede.novaescolaclube.org.br/sites/default/files/importadas/img/mat/e24.png,então http://rede.novaescolaclube.org.br/sites/default/files/importadas/img/mat/e25.png. Mas, http://rede.novaescolaclube.org.br/sites/default/files/importadas/img/mat/e26.png (com a e b inteiros) é um número racional, o que contraria o fato já demonstrado por eles de que a raiz quadrada de um número primo é sempre irracional.  
  
Após essas investigações, peça que os jovens, baseados na decomposição em fatores primos de um número dado, elaborem um critério para decidir se a raiz quadrada desse número é ou não irracional. Auxilie todos a concluir que se houver primos com expoente ímpar na decomposição em fatores primos de um número, esse número terá raiz quadrada irracional.

**Avaliação**

Apresente dois desafios para turma:

* Verificar, em um conjunto de números dado por você, quais são divisíveis por outro número também fornecido previamente. Para os que forem divisíveis, apresentar o resultado da divisão.
* Demonstrar que o produto de raízes quadradas de números primos é sempre irracional e que se a raiz quadrada de um número natural não é um número natural, então ela é irracional.

**Fonte: novaescolaclube**