Introdução à História da Matemática

Rogério S. Mol

Introdução à História da Matemática

Belo Horizonte
CAED-UFMG
2013

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
Profº Clélio Campolina Diniz
Reitor
Profª Rocksane de Carvalho Norton
Vice-Reitoria
Profª Antônia Vitória Soares Aranha
Pró Reitora de Graduação
Profº André Luiz dos Santos Cabral
Pró Reitor Adjunto de Graduação

CENTRO DE APOIO DE EDUCAÇÃO À DISTÂNCIA
Profº Fernando Selmar Rocha Fidalgo
Diretor de Educação a Distância
Prof º Wagner José Corradi Barbosa
Coordenador da UAB/UFMG
Profº Hormindo Pereira de Souza Junior
Coordenador Adjunto da UAB/UFMG

EDITORA CAED-UFMG
Profº Fernando Selmar Rocha Fidalgo

COLEÇÃO EAD – MATEMÁTICA
Coordenador: **Dan Avritzer**
Livro: **Introdução à História da Matemática**
Autor: **Rogério S. Mol**
Revisão: **Jussara Maria Frizzera**
Projeto Gráfico: **Laboratório de Arte e Tecnologia para Educação/EBA/UFMG**
Formatação: **Sérgio Luz**

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Luciana de Oliveira M. Cunha, CRB-6/2725)

M717i Mol, Rogério Santos
Introdução à história da matemática / Rogério S. Mol. – Belo Horizonte : CAED-UFMG, 2013.
138 p. : il. (algumas color.) ; 27 cm.

Inclui bibliografia.
ISBN 978-85-64724-26-6

1. Matemática – História. 2. Ensino a distância. I. Universidade Federal de Minas Gerais. II. Título.

CDD 510.9
CDU 51(091)

SUMÁRIO

Para meus amores,

Ana Paula e Gabriela

APRESENTAÇÃO

"A matemática é uma vasta aventura em ideias;
sua história reflete alguns dos mais
nobres pensamentos de incontáveis gerações"

Dirk J. Sruik

O termo matemática tem origem na palavra grega — com pronúncia vizinha à de sua descendente em língua portuguesa — $\mu\alpha\theta\eta\mu\alpha\tau\iota\kappa\acute{\alpha}$. Esta, por sua vez, provém da palavra $\mu\acute{\alpha}\theta\eta\mu\alpha$, que significa, simplesmente, conhecimento. Esse curto exercício de etimologia em si já é fonte de evidências históricas. Os pensadores da Grécia Clássica, ao racionalizar a compreensão de quantidades e formas, estruturaram a matemática como modo de pensar. Ela, ao longo da história, teve papel central na maneira como o homem entende o mundo — o que induziu os gregos a tratá-la como a essência do conhecimento.

O presente texto tem por fim apresentar um panorama histórico da matemática, desde suas mais remotas origens até o século XIX. Ele foi concebido como texto para o curso de Licenciatura em Matemática a Distância da Universidade Federal de Minas Gerais. O foco nesse público alvo tem efeitos na estrutura do livro, tanto na escolha dos temas a serem abordados quanto na profundidade. Pressupõe-se, evidentemente, que a compreensão histórica de um assunto requer algum nível de conhecimento sobre o próprio assunto. Porém, apesar de concebido como livro-texto para um curso universitário, a intenção é que essa obra seja acessível a um público mais amplo. Conhecimentos básicos sobre geometria, álgebra e aritmética, em nível equivalente ao dos programas do ensino médio, são suficientes para embasar a maior parte da leitura do livro, até a metade do capítulo 5, quando começamos a relatar sobre o desenvolvimento da teoria do cálculo diferencial e integral. Desse ponto em diante, algum conhecimento de cálculo é recomendado, no nível ensinado nos cursos de graduação em ciências exatas. Pensando na função didática da obra, foram acrescentados alguns exercícios no final de cada capítulo. A maior parte deles trabalha o conteúdo matemático dos temas tratados. Porém, a compreensão geral do texto independe dos exercícios.

O material é apresentado, salvo pequenas flutuações, em ordem cronológica. Iniciamos descrevendo as primeiras experiências quantitativas do homem com as primeiras tentativas de contagem. Em seguida, passamos às civilizações antigas — Mesopotâmia e Egito — que acumularam considerável quantidade de saber matemático. A contribuição basilar da Grécia Clássica é enfatizada em dois capítulos inteiros, sendo um lugar especial reservado aos *Elementos*, de Euclides, obra prima da matemática antiga. No período que corresponde à Idade Média europeia, destacamos a contribuição árabe — relevante tanto no que diz respeito à preservação do conhecimento clássico quanto às suas contribuições originais. Em seguida, abordamos o ressurgimento da matemática como objeto de estudo e de criação na Europa Medieval. Finda a Idade Média, nosso foco se dirige para o florescimento da matemática no Renascimento e suas interconexões com as artes e as outras ciências, que culminou com a criação da teoria do cálculo no século

XVII. Finalizamos o texto com um relato sobre alguns episódios da matemática dos séculos XVIII e XIX, com ênfase para os desdobramentos da teoria do cálculo.

Mesmo para um tema aparentemente tão bem delimitado como a matemática, a pretensão de se produzir uma história exaustiva foge à realidade. Assim, fomos forçados a escolher linhas mestras que nos conduziram ao longo do texto. Falamos, sobretudo, sobre a evolução de duas disciplinas — a geometria e a álgebra — e sobre como elas levaram ao desenvolvimento do cálculo diferencial e integral. Buscamos abordar a evolução das ideias, conceitos, métodos e problemas, procurando ainda dar um gosto da evolução da notação e da linguagem.

A história aqui contada é a da matemática do Ocidente, ou seja, da matemática formada a partir da herança grega e que veio a desaguar na matemática moderna. Mesmo o que é dito no livro sobre a matemática árabe e a breve menção à matemática hindu correspondem a contribuições que estiveram na raiz da matemática ocidental. Alguns temas negligenciados seriam dignos de merecer um tratamento mais cuidadoso. Talvez coubesse uma análise mais profunda da matemática hindu e um relato sobre a matemática chinesa.

Procuramos apresentar a matemática como uma ciência dinâmica, em processo de construção, resultado de séculos de contribuições — individuais e coletivas — de vários gênios criativos cujos nomes a história registrou, mas também de incontáveis anônimos. A matemática é um produto de séculos de vida em civilização. Foi influenciada e estimulada por muitos eventos e situações de cunho econômico, social e político. Assim como a história humana em geral moldou a maneira do homem produzir ciência, a posse do conhecimento científico teve grande influência sobre a forma como o homem conduz sua vida — algo cuja evidência aumenta à medida que nos aproximamos dos dias atuais.

Dois textos gerais foram usados como linhas condutoras da nossa narrativa e também serviram de fontes para o material apresentado: o livro *Une histoire des mathématiques — routes et dédales*, de Amy Dahan-Dalmedico e Jeanne Peiffer, e a obra *A history of mathematics*, de Carl B. Boyer e Uta C. Merzbach. São textos de grande qualidade, que recomendaria ao leitor que se sentisse atraído pelo tema. Outras obras de caráter geral foram consultadas, assim como diversos textos originais, todos citados como referências.

Gostaria de agradecer ao Professor Dan Avritzer, pelo convite para lecionar a disciplina História da Matemática para a primeira turma do curso de Licenciatura em Matemática a Distância da UFMG. Como mencionado, o livro nasceu para atender às demandas do curso. Agradeço também a minha esposa, Ana Paula, pelo estímulo e empolgação demonstrados enquanto redigi o texto. Nada melhor do que recebê-los de uma pessoa tão próxima, sobretudo sendo ela uma especialista em livros. Sou grato a ela ainda por ter encontrado tempo — em meio à redação de sua tese de doutorado — para fazer a primeira leitura e a primeira revisão desse livro.

Finalizo manifestando a esperança de que essa obra, ao proporcionar uma visão da matemática a partir de sua dimensão histórica, contribua para que o leitor aprofunde sua compreensão sobre a própria matemática.

Belo Horizonte, novembro de 2011
Rogério Santos Mol

NOTA DO EDITOR

A Universidade Federal de Minas Gerais atua em diversos projetos de Educação a Distância, que incluem atividades de ensino, pesquisa e extensão. Dentre elas, destacam-se as ações vinculadas ao Centro de Apoio à Educação a Distância (CAED), que iniciou suas atividades em 2003, credenciando a UFMG junto ao Ministério da Educação para a oferta de cursos a distância.

O CAED-UFMG (Centro de Apoio à Educação a Distância da Universidade Federal de Minas Gerais), Unidade Administrativa da Pró-Reitoria de Graduação, tem por objetivo administrar, coordenar e assessorar o desenvolvimento de cursos de graduação, de pós-graduação e de extensão na modalidade a distância, desenvolver estudos e pesquisas sobre educação a distância, promover a articulação da UFMG com os polos de apoio presencial, como também produzir e editar livros acadêmicos e/ou didáticos, impressos e digitais, bem como a produção de outros materiais pedagógicos sobre EAD.

Em 2007, diante do objetivo de formação inicial de professores em serviço, foi criado o Programa Pró-Licenciatura com a criação dos cursos de graduação a distância e, em 2008, com a necessidade de expansão da educação superior pública, foi criado pelo Ministério da Educação o Sistema Universidade Aberta do Brasil – UAB. A UFMG integrou-se a esses programas, visando apoiar a formação de professores em Minas Gerais, além de desenvolver um ensino superior de qualidade em municípios brasileiros desprovidos de instituições de ensino superior.

Atualmente, a UFMG oferece, através do Pró-licenciatura e da UAB, cinco cursos de graduação, quatro cursos de pós-graduação *lato sensu*, sete cursos de aperfeiçoamento e um de atualização.

Como um passo importante e decisivo, o CAED-UFMG decidiu, no ano de 2011, criar a Editora CAED-UFMG como forma de potencializar a produção do material didático a ser disponibilizado para os cursos em funcionamento.

Fernando Selmar Rocha Fidalgo
Editor

1 Primórdios

AULA1: PRIMÓRDIOS

OBJETIVOS
Ao terminar a leitura desse capítulo, o leitor deverá ser capaz de:
1. Compreender a evolução do processo de contagem.
2. Entender as motivações e os primeiros avanços da matemática nas civilizações mesopotâmica e egípcia.
3. Entender os sistemas de numeração usados na Mesopotâmia e no Egito.

1.1 Contagem

Começamos a nossa história abordando aquela que parece ser a noção matemática mais simples: o processo de contagem. Ele começou a ser desenvolvido pelo ser humano muito antes de haver escrita ou civilização e, por isso, possuímos poucos elementos concretos para sua análise. No entanto, as habilidades de contagem precedem qualquer desenvolvimento matemático mais sofisticado e sua compreensão é um passo inicial essencial para uma abordagem histórica da matemática.

O ser humano possui habilidades naturais para pensar noções quantitativas rudimentares: muito e pouco, grande e pequeno, lento e rápido. A evolução humana, de uma vida primitiva para uma vida em sociedade, incorporou novos desafios sociais e econômicos. Novas demandas surgiram na organização do espaço, nas técnicas de produção e nas relações de natureza comercial. Estímulos vieram da interação com a natureza ao seu redor, em especial da observação dos céus. O homem se viu assim diante da necessidade de pensar numericamente.

O processo de contagem é algo sofisticado e não se trata de algo instintivo ou inato. Seu início aconteceu quando o homem desenvolveu a capacidade de comparar conjuntos de objetos e estabelecer entre eles uma correspondência um a um. Por exemplo, um pastor podia ter a noção do tamanho de seu rebanho ao comparar suas ovelhas com os dedos de suas mãos. Partes do corpo, como os dedos das mãos ou dos pés, funcionaram como instrumentos de contagem naturais. Pedregulhos, conchas ou grãos, bem como marcas no chão, na areia, em ossos ou madeira, poderiam ser empregados para quantificar o número de pessoas em uma população, de animais em um rebanho, ou ainda o número de dias decorridos desde um determinado evento. No entanto, esse primeiro passo ainda não é suficiente para construir um sistema de contagem. Para tal, seria ainda necessário incorporar a noção de ordem. No processo simples de associar objetos aos dedos das mãos, essa noção aparece ao ordenarmos os dedos, do polegar para o mínimo ou vice-versa. Note-se que o modo como os dedos são usados na contagem é um fato cultural: diferentes povos ordenam os dedos de forma distinta — alguns povos fecham os dedos da mãos ao contar, enquanto outros os abrem.

Como salientamos, o processo de contagem é anterior à história matemática, à existência de documentos escritos. Assim, é impossível estabelecer com alguma precisão as etapas do seu desenvolvimento. No entanto, alguns elementos podem nos dar pistas sobre os caminhos percorridos em sua evolução. Uma dessas ferramentas é a linguística. Palavras dos idiomas conhecidos, vivos ou mortos, que designam números ou noções de quantidade, podem nos revelar a forma como esses conceitos foram incorporados. Por exemplo, o emprego da palavra "dígito" — proveniente do latim *digitus*, que significa dedo — para significar numeral escrito é uma forte indicação do uso dos dedos na origem do processo de contagem.

Considerando as evidências de que a contagem iniciou com os dedos, infere-se que a maneira de usá-los foi determinante na escolha das bases para os sistemas numéricos. A base 10, que hoje usamos e que era empregada pelos egípcios antigos, teria origem nos 10 dedos da mão. A base 20, usada pelos maias pré-colombianos, teria sido motivada pelo uso dos 10 dedos das mãos e dos 10 dedos dos pés. A contagem em dúzias, ou seja, na base 12, pode também ser vista como de natureza antropomórfica: em uma mão, o dedo polegar é usado para contar as 12 falanges dos outros quatro dedos. A possibilidade de contar 12 unidades em uma das mãos, conjugada com os cinco dedos da outra mão, pode estar na origem de sistemas de contagem na base 60, como era o sistema babilônico, sobre o qual falaremos na próxima seção.

Uma segunda observação de natureza linguística é a de que o singular e o plural já indicam um tratamento diferenciado entre o conjunto com uma unidade ou mais de uma unidade. Algo ainda mais sutil ocorre em algumas línguas, nas quais, além do singular e do plural, existe uma terceira forma chamada de "dual" que é usada para grupos de exatamente dois objetos. Isso está presente no grego clássico, no hebreu bíblico e no árabe, sugerindo um processo primitivo de contagem da forma "um, dois e muitos". Observamos que a palavra "três" tem origem no indo-europeu *trejes*, cujo significado é "além", "do outro lado" — o prefixo "trans-" tem a mesma origem. Aparentemente, a distinção entre as diversas formas de "muito" é algo posterior a essa noção primária de contagem.

Uma segunda fonte de evidências a respeito da evolução do processo de contagem vem da observação e do estudo de tribos não civilizadas ao redor do mundo. Alguns padrões são encontrados e estes possivelmente estiveram presentes nos grupos humanos que viriam posteriormente a construir as primeiras civilizações. O padrão "um, dois e muitos" é aqui reencontrado. Algumas tribos australianas e sul-africanas têm palavras para designar "um" e "dois", sendo as quantidades maiores representadas por uma palavra cujo sentido é "muitos".

Construções quantitativas um pouco mais elaboradas são encontradas em algumas tribos da Nova Guiné, da África e da América do Sul: existem palavras para designar "um", "dois" e, a partir daí, os números são construídos pela justaposição destas duas palavras básicas: "dois-um", "dois-dois" e assim por diante, até atingir uma certa quantidade limite, a partir da qual todas as quantidades são referidas por "muitos". Esse sistema é chamado de 2-sistema. Observamos que o nosso sistema de numeração na base 10 é, em grande medida, formado pelo mesmo processo:

dezesseis = dez e seis, dezessete = dez e sete, vinte e um, etc.

Os *bushmen* de Bostswana, na África, designam números de um até seis da seguinte forma:

um: *a*	quatro: *oa-oa*
dois: *oa*	cinco: *oa-oa-a*
três: *ua*	seis: *oa-oa-oa*

Quantidades maiores que seis são referidas por um termo significando "muitos".

O seguinte exemplo vem dos povos aborígenes das Ilhas do Estreito de Torres, entre a Austrália e a Nova Guiné:

um: *urapon*	quatro: *okosa-okosa*
dois: *okosa*	cinco: *okosa-okosa-urapon*
três: *okosa-urapon*	

Há vários exemplos, vindos da linguística e da antropologia, de que as primeiras tentativas de contagem foram contextuais. Existem línguas primitivas em que a escolha da palavra empregada para designar o número de objetos em um conjunto estava vinculada à natureza do objeto. Por exemplo, no século XIX, a língua Tsimshian, falada por tribos da Colúmbia Britânica, no Canadá, possuía pelo menos sete sistemas diferentes de palavras usadas para contar, cujo uso dependia das características do objeto contado. Assim, as palavras designando números de 1 a 10 mudariam se os objetos contados fossem canoas ou pessoas, ou ainda se eles fossem planos, redondos ou longos. Esse aspecto contextual da contagem deixou traços nas línguas modernas, aparecendo em diversos vocábulos que guardam a noção de quantidade, dentre eles os substantivos coletivos.

Há registros primitivos de ensaios humanos no campo da contagem. O osso de Ishango é um dos mais antigos objetos com inscrições de caráter numérico. Encontrado na região de Ishango, perto do Lago Eduardo, na fronteira entre Congo e Uganda, trata-se de um osso, mais especificamente da fíbula de um babuíno, com um pedaço de quartzo em sua extremidade, indicando que também funcionasse como uma ferramenta de gravação e escrita. Estima-se que esse osso date de mais de 20000 anos. O osso possui três colunas de traços talhados, correspondendo às suas três faces. Essas marcas indicam, a princípio, uma tentativa de contagem. Porém, a análise das relações entre os agrupamentos de traços pode sugerir uma compreensão matemática um pouco mais sofisticada. O número de traços por grupo, em cada uma das colunas, é indicado no quadro abaixo:

Coluna 1:	9, 19, 21, 11
Coluna 2:	19, 17, 13, 11
Coluna 3:	7, 5, 5, 10, 8, 4, 6, 3

Figura 1.1: Faces frontal e posterior do Osso de Ishango — *Institut royal des sciences naturelles de Belgique*.

Alguns fatos curiosos são observados na distribuição dessas marcas: as colunas 2 e 3 têm soma 60, o que pode estar relacionado aos meses lunares. A coluna 1 tem o padrão 10-1, 20-1, 20+1, 10+1, enquanto o padrão na coluna 2 é 20-1, 10+7, 20-7, 10+1. Os números primos sequenciais 11, 13, 17, 19 são encontrados na coluna 2. São evidências de noções elementares de números primos e de contagem nas bases 10 e 20.

Todos esses primeiros ensaios no universo numérico, que resultaram em métodos de contagem, prepararam terreno para que a matemática surgisse como campo de conhecimento. Isso aconteceria somente com as primeiras civilizações, na Mesopotâmia e no Egito, que serão tema das duas próximas seções.

1.2 Mesopotâmia

Considerada o berço da civilização, a Mesopotâmia compreende um conjunto de povos que viveram nos vales dos rios Tigres e Eufrates, no que hoje corresponde ao território do Iraque e regiões adjacentes da Síria, Turquia e Irã, no período que se estende aproximadamente do ano 3500 a.C. até o começo da era cristã. Dentre os reinos mesopotâmicos, merece destaque aquele baseado na cidade de Babilônia, cujo apogeu ocorreu entre 1800 a.C. e 1500 a.C., destacando-se o reino de Hamurabi, que conquistou toda a região em torno de 1700 a.C.. Por isso, há a convenção de se referir como babilônica à civilização mesopotâmica, ao menos no período de 2000 a.C. a 600 a.C.. Na Mesopotâmia, a vida urbana floresceu, a técnica e os artefatos evoluíram a partir do domínio da metalurgia e a engenharia teve progressos nos métodos de construção e no desenvolvimento de sistemas de irrigação e de controle de cheias. Pela primeira vez na história surgiu uma economia de larga escala. Porém, o maior legado dessa civilização foi o desenvolvimento, no quarto milênio antes da nossa era, da forma de comunicação escrita mais antiga da humanidade: a escrita cuneiforme, assim denominada por ser composta por símbolos em forma de cunha.

Os mesopotâmicos usavam como suporte para sua escrita placas de argila, que eram marcadas com estilete e, em seguida, eram cozidas ou secas ao sol para aumentar sua durabilidade. Essas tabuletas, normalmente retangulares, tinham espessura pouco maior que 2 cm, com tamanhos variando de poucos a algumas dezenas de centímetros. Tais objetos se mostraram muito mais resistentes à ação do tempo do que outros suportes de escrita utilizados ao longo da história, como por exemplo os papiros egípcios. Assim, milhares de tabuletas com escrita cuneiforme chegaram aos nossos dias e vieram à luz através de pesquisas arqueológicas empreendidas desde o século XIX. Muitas delas contêm conteúdo matemático e vieram a funcionar como preciosas fontes para analisar o estágio do conhecimento matemático da civilização mesopotâmica.

A análise dessas fontes revelam que a matemática mesopotâmica tinha um aspecto eminentemente — mas não exclusivamente — prático. Os babilônicos desenvolveram um extenso conhecimento de cálculos e medidas, que se aplicava, sobretudo, a problemas de natureza econômica e comercial: câmbio de moedas, troca de mercadorias, taxas de juros simples e compostos, cálculos de impostos e problemas de divisão de colheitas. Uma boa parcela das tabuletas matemáticas babilônicas que chegaram aos nossos dias são tabelas de números, tais como tabelas de multiplicações e de recíprocos — estes tinham importância pois a divisão por um número era feita multiplicando-se pelo recíproco correspondente, ou seja, $m/n = m \times 1/n$. Há ainda tabelas de quadrados, cubos, raízes quadradas e raízes cúbicas, progressões geométricas, coeficientes geométricos e fatores de conversão envolvendo pesos e medidas. Algumas tabuletas apresentam sequências de potências de um número dado, parecendo ter a função de uma tabela de logaritmos. Visavam responder a perguntas do tipo "a que potência um número deve ser elevado para se obter um outro número dado?". Questões deste tipo poderiam advir de problemas práticos, tais como cálculos envolvendo taxas de juros. A interpolação linear, técnica que os babilônicos usavam com frequência, podia ser usada para estimar o logaritmo de um número que estivesse em posição intermediária na tabela.

Um outro grupo importante de tabuletas babilônicas continha problemas matemáticos. A maior parte delas, escritas de forma abreviada, pareciam destinadas a serem usadas em escolas, contando provavelmente com a explicação de um professor. Em geral, o objetivo do problema proposto era o cálculo de um número e era relacionado a aspectos quantitativos de objetos ou a atividades quotidianas: pesos e medidas, áreas de terrenos, quantidade de material em uma construção, etc. A natureza desses problemas ilustra o caráter algorítmico e aritmético da matemática babilônica, em oposição ao caráter geométrico da matemática grega, em que figuras e demonstrações tinham papel central.

O sistema de numeração babilônico combinava um sistema sexagesimal e decimal, ou seja, as bases 60 e 10, com um princípio de posição, em que dígitos colocados mais à esquerda representavam valores maiores. O símbolo 𒁹 designava a unidade 1 (na base 60), enquanto o símbolo 𒌋 representava o número 10. As combinações desses dois símbolos eram usadas para gerar os números até 60. Alcançado o número 60, passava-se para a coluna imediatamente à esquerda e o procedimento era repetido. Dessa forma, qualquer número podia ser representado usando apenas dois símbolos básicos. O sistema numérico, ao menos o apresentado nas tabuletas mais antigas (antes de 1700 a.C.), não contava com o zero. Isso a princípio criava um problema para a representação de números grandes, o que poderia ser resolvido deixando vazia a coluna que deveria ser preenchida com o zero. De um modo geral, o valor dos símbolos numéricos dependia do contexto, podendo o mesmo símbolo representar 60 ou 3600 ($= 60^2$), ou então as frações 1/60 ou 1/3600. No século III a.C., a matemática mesopotâmica resolveu esse problema e passou a empregar o símbolo  para preencher os espaços vazios, criando assim o zero mais antigo da história.

Especula-se que o uso da base 60 tenha sido motivado por observações astronômicas, seja na consideração de que o mês lunar dura perto de trinta dias, ou de que o ano consiste aproximadamente de $360 = 6 \times 60$ dias. Uma outra especulação é a de que a base 60 também tenha raiz antropomórfica, uma vez que é possível, como descrito na seção anterior, usar as duas mãos para contar de 1 até 60. Uma outra hipótese, bastante razoável, é de natureza puramente prática: o número 60 possui um grande número de divisores (2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20 e 30), o que facilitaria os cálculos envolvendo divisões e frações. De todo modo, os resquícios de contagem na base 60 que hoje temos em nossa cultura, tais como o número de subdivisões de um minuto em segundos, ou de uma hora em minutos, ou ainda a divisão de um círculo em $6 \times 60 = 360$ graus, são todos herança babilônica.

Nos exemplos abaixo, o símbolo 𒁹 representa a unidade na base 60, enquanto o símbolo 𒌋 representa o número 10:

𒌋𒌋 𒁹𒁹𒁹 $23 = 20 + 3$

𒁹 𒌋𒌋 𒁹𒁹𒁹 $83 = 60 + 23$

𒌋𒌋 𒁹𒁹 𒌋𒌋 𒁹𒁹𒁹 $1343 = 2 \times 10 \times 60 + 2 \times 60 + 23$

𒁹 𒁹𒁹 𒌋𒌋 𒁹𒁹𒁹 $3743 = 60 \times 60 + 2 \times 60 + 23$

Na tabuleta da Figura 1.2 é calculada a diagonal de um quadrado. A razão entre o valor da diagonal e o lado do quadrado está marcada sobre a diagonal da figura:

𒁹 𒌋𒌋𒁹𒁹𒁹𒁹 𒌋𒌋𒌋𒌋𒌋𒁹 𒌋

Esse valor corresponde a:

$$1;24.51.10 = 1 + 24 \times 60^{-1} + 51 \times 60^{-2} + 10 \times 60^{-3} = 1,4142129.$$

Empregamos aqui o ponto e vírgula para separar as partes inteira e fracionária, e os pontos para separar as posições sexagesimais. O valor obtido deve ser comparado com $\sqrt{2} = 1,4142135...$

Figura 1.2: Tabuleta $\sqrt{2}$ — *Babylonian Collection, Yale University.*

Os babilônicos usavam, para o cálculo da raiz quadrada, um método de aproximações sucessivas. Para resolver $x = \sqrt{a}$, tentavam uma primeira aproximação a_1. A segunda aproximação era obtida por $b_1 = a/a_1$, tendo como base o fato de que se $a_1 \approx \sqrt{a}$, então $b_1 \approx a/\sqrt{a} = \sqrt{a}$. Evidentemente, se a_1 é menor do que o valor de $\sqrt{a}$ procurado, então b_1 é maior do que esse valor e vice-versa. Assim, a aproximação seguinte pode ser tomada como a média aritmética $a_2 = \frac{1}{2}(a_1 + b_1)$. O processo continua, fazendo $b_2 = a/a_2$ e tomando como aproximação seguinte $a_3 = \frac{1}{2}(a_2 + b_2)$. Tem-se assim um método iterativo, que poderia ter trazido para a ciência matemática, ainda em processo de gestação, a noção de infinito.

Nas tabuletas babilônicas são também encontrados problemas que podem ser interpretados como equações de primeiro e segundo graus. Neles, era usada uma linguagem puramente retórica e de caráter geométrico. A variável x era chamada de lado e x^2 de quadrado. No caso de duas incógnitas, elas eram chamadas de comprimento e largura. No entanto, não era respeitado o princípio da homogeneidade e eram permitidas operações com grandezas diferentes, como por exemplo a subtração de um lado e de uma área. As equações quadráticas mais estudadas eram as da forma $x^2 - ax = b$ e $x^2 - ax = b$. Em ambas as situações, as soluções apresentadas equivalem a usar as fórmulas que hoje conhecemos: $a/2 + \sqrt{a^2 + 4b}/2$, para o primeiro caso, e $-a/2 + \sqrt{a^2 + 4b}/2$, para o segundo. Ressaltamos que as soluções negativas não eram admitidas. Provavelmente, os babilônicos chegaram a essas soluções somando $(a/2)^2$ a ambos os lados da equação e completando quadrados.

No que diz respeito à geometria, os babilônicos conheciam a área do retângulo, do triângulo retângulo e do trapézio. Conheciam a circunferência do círculo, estimada em três vezes o seu diâmetro, e sua área, 1/12 do quadrado de sua circunferência.

Ambos os cálculos envolviam uma estimativa de $\pi = 3$, muito embora tenham sido encontradas em algumas tabuletas estimativas de $\pi = 3\frac{1}{8} = 3,125$. Os babilônicos conheciam o volume de um paralelepípedo e o volume do cilindro. Os cálculos de $\sqrt{2}$ apresentados acima mostram um conhecimento do resultado que, desde os tempos clássicos, recebe o nome de Teorema de Pitágoras. Ademais, os babilônicos tinham ciência do fato de que um ângulo inscrito em um semicírculo é reto. Esse resultado, por sua vez, é conhecido como Teorema de Tales, muito embora os babilônicos o usassem um milênio antes de Tales ter nascido. Esses dois exemplos, envolvendo o Teorema de Pitágoras e o Teorema de Tales, dão uma mostra do quanto a matemática grega pode ter herdado da matemática babilônica.

1.3 Egito

Figura 1.3: Papiro de Ani, 1250 a.C. — Museu Britânico.

A civilização egípcia se desenvolveu no fértil vale do rio Nilo, no território que hoje corresponde ao Egito. Apesar de elementos civilizatórios estarem ali presentes desde o início do quarto milênio antes de Cristo, marcamos o seu início em 3150 a.C., quando ocorreu a unificação do baixo e do alto Egito com o primeiro faraó, iniciando o chamado período dinástico. A civilização egípcia passou pelo seu auge de prosperidade e poder entre os séculos XVI e IX a.C., entrando em seguida em um período de progressiva decadência, que culminou com a conquista do Egito por Alexandre, o Grande, em 332 a.C.. Um de seus generais, Ptolemeu Soter, se estabeleceu como governante, iniciando a chamada dinastia Ptolemaica que, a partir de Alexandria, governou o Egito até 30 a.C., ano em que a região passou a ser uma província romana.

Situa-se no Egito pré-dinástico aquele que pode ser considerado o mais antigo evento datado: a introdução do calendário egípcio, em 4241 a.C.. Composto de 12 meses de 30 dias cada e mais 5 dias festivos, era bastante superior ao usado na Europa até o século XVI. A produção do calendário foi feita a partir da comparação de observações astronômicas com o ciclo de cheias do rio Nilo. As habilidades aritméticas demandadas na organização do calendário egípcio dão uma medida das possibilidades do uso de conhecimentos matemáticos para solucionar problemas de natureza prática.

De fato, foram as necessidades práticas que serviram de estímulo para o desenvolvimento da matemática egípcia. A partir do ano 3000 a.C., inicia-se um período de grande desenvolvimento da engenharia, em que a face mais visível é a construção de pirâmides e de outros monumentos grandiosos. A maior das pirâmides, a grande pirâmide de Quéops, construída por volta do ano de 2550 a.C., tinha originalmente 146,6 m de altura (o que equivale a um prédio de 49 andares) e foi, até cerca do ano 1300 d.C., a mais alta estrutura erguida pelo homem. Sua construção envolveu níveis de precisão surpreendentes: sua base é quadrada, com um erro de 1/14000 do comprimento total, na medida do comprimento, e um erro de 1/27000 de um ângulo reto, na medida do ângulo. No entanto, sugestões de que as pirâmides guardavam em suas proporções sinais de um conhecimento matemático ainda mais avançado — sugere-se, por exemplo, que a pirâmide de Quéops tenha sido intencionalmente construída de forma que a razão entre o perímetro da base e sua altura fosse de 2π — parecem infundadas. De todo modo, o desafio lançado pela engenharia gerou necessidades que fizeram impulsionar o estoque de conhecimentos matemáticos da civilização egípcia.

Muitos dos registros da civilização egípcia chegaram aos nossos dias em papiros, alguns deles de conteúdo matemático. O papiro era produzido cortando-se em finas tiras a parte interna do caule da planta de mesmo nome, planta esta abundante no vale do rio Nilo. Essas tiras eram sobrepostas e cruzadas, para em seguida serem prensadas, formando folhas que, coladas a outras folhas, formavam uma longa fita que depois era disposta em um rolo. Os papiros eram grafados por escribas em escrita hierática, uma simplificação da escrita hieroglífica mais adequada à escrita corrente. Ambas eram compostas de símbolos, porém a escrita hieroglífica tinha caráter pictórico e era mais usada em monumentos.

O papiro de conteúdo matemático mais célebre é o Papiro de Rhind, adquirido pelo egiptólogo escocês Alexander Rhind em 1858 e datado de cerca de 1650 a.C.. Com mais de 5 m de comprimento e 33 cm de largura, é possivelmente o melhor registro da matemática egípcia. Foi copiado por um escriba de nome Ahmes de um texto matemático mais antigo. Contém 84 problemas de geometria e de aritmética acompanhados de soluções. Entre os problemas aritméticos, há estudos de frações unitárias e de equações lineares e entre os problemas de geometria, há o cálculo de volume de silos de base circular e retangular e cálculo de áreas.

Figura 1.4: Papiro de Rhind — Museu Britânico.

No problema 41 é calculado o volume de um silo cilíndrico de diâmetro d e altura h. O volume V é dado por:

$$V = [(1 - 1/9)d^2h.$$

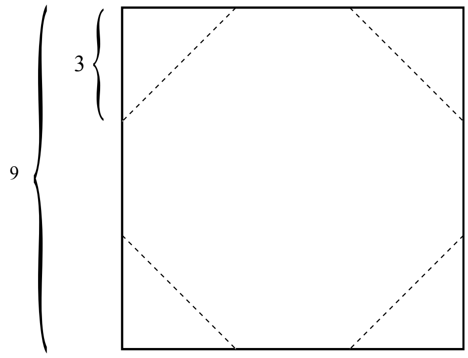
Usando a notação moderna, com $r = 2d$, temos:

$$V = [(8/9)2r]^2h = 256/81r^2h.$$

Essa expressão nos dá a aproximação $\pi \simeq 256/81 = 3,1605$.

Uma indicação de como é obtida a aproximação $\pi \simeq 256/81 = 3,1605$, que aparece no problema acima, é dada no problema 48, onde a área de um círculo é aproximada pela de um octógono regular.

No problema 48 a área de um círculo é calculada aproximando-se o círculo por um octógono inscrito em um quadrado. Em um quadrado de lado 9, cada um de seus lados é trissectado e os triângulos das extremidades são retirados, formando um octógono regular de lado 3, conforme indicado na figura a seguir:



Assim, a área do octógono é $A = 9^2 - 4 \times (1/2)3^2 = 63$. A área é em seguida aproximada por 64. Podemos, a partir dessa aproximação, calcular o valor de π:

$$\pi \left(\frac{9}{2}\right)^2 \approx 64 = 8^2 \;\Rightarrow\; \pi \approx \frac{216}{81} = 3,1605.$$

Um segundo documento egípcio de valioso conteúdo matemático é o chamado Papiro de Moscou. Adquirido pelo egiptólogo russo Vladimir Golenishchev no final do século XIX, é menor que o Papiro de Rhind (5,4 m de comprimento e entre 4 e 7 cm de largura), porém é mais antigo — seu texto se refere a material de cerca de 1850 a.C.. É composto de 25 problemas com soluções. O problema 14 do Papiro de Moscou apresenta o método para o cálculo do volume V do tronco da pirâmide de base quadrada com dimensões dadas, que está de acordo com a fórmula que conhecemos:

$$V = (1/3)(a^2 + ab + b^2)h,$$

onde a e b são os lados das duas bases quadradas e h é a altura. Não há, no entanto, referência sobre como essa fórmula foi obtida. No entanto, considerando a complexidade dessa expressão, dificilmente ela teria sido obtida de maneira puramente empírica, e é de se supor que algum trabalho teórico tenha sido feito para obter esse resultado.

O historiador grego Heródoto (c. 484-420 a.C.) atribuiu a origem da geometria egípcia à necessidade de, após cada inundação do rio Nilo, redistribuir os campos cultiváveis entre seus proprietários. Em contraste com a geometria grega — a ser tratada mais adiante — na qual as demonstrações são parte essencial, a geometria egípcia é prática. O objetivo principal era, por meio de tentativas e aproximações, obter métodos e regras eficazes do ponto de vista da aplicação. Assim, os egípcios eram capazes de calcular áreas de figuras retilíneas, como o quadrado, o triângulo e o trapézio. Por exemplo, no problema 51 do Papiro de Rhind, a área de um triângulo isósceles é calculada tomando metade da base e multiplicando pela altura. A justificativa apresentada é a de que o triângulo isósceles pode ser pensado como dois triângulos retos que, ao serem justapostos, formam um retângulo. Como vimos, os egípcios usavam a aproximação $\pi = (16/9)^2$ para calcular a área do círculo. Multiplicavam a base pela altura para calcular o volume do cubo, do prisma e do cilindro, e usavam a fórmula $V = (1/3)Ah$ para calcular o volume da pirâmide de área da base A e altura h. Todas essas fórmulas envolvendo áreas e volumes eram empregadas no cálculo da quantidade de material necessário na construção de monumentos.

Faremos a seguir algumas considerações sobre o sistema de numeração egípcio. A numeração hieroglífica era na base 10 e não posicional. Isso significa que símbolos diferentes representam 1, 10, 100, etc. Cada um desses símbolos é repetido quantas vezes forem necessárias e a ordem de apresentação não é importante por serem os símbolos diferentes. A seguinte tabela apresenta alguns símbolos egípcios e seus valores correspondentes:

𓁨	𓆐	𓂭	𓆼	𓍢	𓎆	𓏺
1.000.000	100.000	10.000	1.000	100	10	1

Alguns números são a seguir grafados a partir da composição desses números básicos:

𓎆𓎆 𓏺	21	𓁨𓁨𓁨 𓆐 𓆼𓆼𓆼 𓎆𓎆𓎆	3.103.030
𓍢𓍢 𓏺	201	𓂭𓂭 𓆼 𓎆𓎆𓎆 𓏺𓏺	21.032
𓍢𓍢 𓎆𓎆𓎆𓎆 𓏺𓏺𓏺 𓍢𓍢 𓎆𓎆𓎆 𓏺𓏺	475	𓂭𓂭 𓆼𓆼𓆼𓆼 𓍢𓍢𓍢 𓂭 𓆼𓆼𓆼𓆼 𓍢𓍢	38.500

A notação hierática dos numerais era simplificada: para representar os grupos de símbolos que apareciam na notação hieroglífica foram introduzidos novos signos, com pouca relação com os símbolos originais. Assim, havia nove símbolos para as unidades, nove para as dezenas, nove para as centenas e assim por diante. Isso permitiu uma economia de símbolos, de forma que o número 475, representado acima com 16 símbolos na notação hieroglífica, demandava apenas 3 símbolos na notação hierática.

Os egípcios admitiam apenas frações unitárias, ou seja, frações com numerador 1. Demandas do mundo prático explicam essa predileção: o conhecimento das frações unitárias atendia às necessidades contábeis envolvidas na repartição de recursos e na coleta de impostos. Representavam o recíproco de um número sobrescrevendo o símbolo de uma oval alongada ao símbolo do número correspondente. Possuíam ainda símbolos particulares para as frações $1/2, 2/3$ e $3/4$. Tinham interesse em frações da forma $2/n$, que eram decompostas em frações unitárias. O Papiro de Rhind contém, em sua primeira parte, uma tabela com decomposições desse tipo para n ímpar variando de 3 a 101.

A seguir, um exemplo de decomposição de uma fração da forma $2/n$ em frações unitárias:

$$\frac{2}{101} = \frac{1}{101} + \frac{1}{202} + \frac{1}{303} + \frac{1}{606}$$

Essa decomposição pode ser obtida da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \tfrac{2}{101} &= \tfrac{1}{101} + \tfrac{1}{101} \\ &= \tfrac{1}{101} + \left(\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{101} + \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{101}\right) \\ &= \tfrac{1}{101} + \tfrac{1}{202} + \left(\tfrac{2}{3}\tfrac{1}{202} + \tfrac{1}{3}\tfrac{1}{202}\right) \\ &= \tfrac{1}{101} + \tfrac{1}{202} + \tfrac{1}{303} + \tfrac{1}{606} \end{aligned}$$

Nos cálculos acima são usados os métodos de redução pelas frações $1/2$ (linha 2) e $1/3$ (linha 3). Vale destacar que os egípcios realizavam os cálculos acima sem a notação atual de frações, o que tornava esse procedimento muito mais complexo.

Vários dos problemas presentes nos Papiros de Rhind e de Moscou diziam respeito à repartição de víveres, animais e outros objetos. Esses problemas eram resolvidos de forma aritmética ou através de equações lineares da forma $x + ax = b$ ou $x + ax + bx = c$. Com exceção da fração $2/3$, os egípcios trabalhavam com frações com numerador 1, o que trazia dificuldades para o manejo de tais equações. A solução encontrada foi resolvê-las por um método conhecido hoje como "método da falsa posição".

No método da falsa posição, um valor específico é atribuído à incógnita. A expressão do lado esquerdo é calculada para esse valor e o resultado encontrado é comparado com o resultado desejado. Em seguida, o resultado correto é encontrado por proporção. Como exemplo, o problema 24 do Papiro de Rhind propõe resolver a equação $x+(1/7)x = 19$. Inicialmente, é atribuído valor $x = 7$ e, para esse valor, encontramos $x + (1/7)x = 8$. Sabendo que $8(2 + 1/4 + 1/8) = 19$, a solução é obtida multiplicando 7 por $2+1/4+1/8$. Expressa em frações unitárias, a solução é $x = 16 + 1/2 + 1/8$.

Para os egípcios, a operação aritmética fundamental era a adição. A partir dela, as operações de multiplicação e divisão eram feitas por um processo conhecido como "duplicação". Nesse processo, o resultado é obtido a partir de sucessivas multiplicações por 2. Assim, para multiplicar 23 por 18, primeiro são calculados, sucessivamente, $23\times 2 = 46$, $46\times 2 = 92$, $92\times 2 = 184$ e $184\times 2 = 368$. Uma vez que $18 = 2\times 2\times 2\times 2+2 = 2^4+2$, o resultado é obtido fazendo $23\times 18 = 368+46 = 414$. Para a divisão, o processo de duplicação é invertido, sendo o divisor sucessivamente duplicado.

1.4 Exercícios

1. Escreva os seguintes números na base 60 e os converta para a base 10 (admita que todos os números começam com as unidades):

   (a) 𒌋𒌋𒌋𒌋𒁹𒁹𒁹

   (b) 𒌋𒌋𒁹 𒌋𒌋𒌋𒌋𒁹𒁹𒁹

   (c) 𒌋 𒑱 𒌋𒌋𒌋𒌋𒁹𒁹𒁹

2. Na tabuleta em que é feito o cálculo de $\sqrt{2}$ (Figura 1.2) aparecem os seguintes números:

   - 𒌋𒌋𒌋, ou seja, $0;30$, no lado do quadrado.
   - 𒌋𒌋𒌋𒌋𒁹𒁹 𒌋𒌋𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹 𒌋𒌋𒌋𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹, ou seja, $0;42.25.35$ para o valor da diagonal.

   Com a ajuda de uma calculadora, converta esses números para a base 10 e calcule sua razão para obter o valor aproximado de $\sqrt{2}$.

3. Use o método babilônico do cálculo da raiz quadrada por aproximações sucessivas e, partindo de $a_1 = 1,5$, calcule a aproximação a_3 para $\sqrt{2}$. Compare com o valor de $\sqrt{2}$.

4. Considere a seguinte tabela:

n	1	2	3	4
3^n	3	9	27	81

   Use interpolação linear para obter a potência a qual 3 deve ser elevado para obter 50. Compare com o valor de $\log_3 50$.

5. Escreva os seguintes números hieroglíficos no sistema indo-arábico:

   (a) 𓎆𓎆𓎆𓎆 𓏺𓏺𓏺

   (b) 𓆼𓆼 𓍢 𓎆𓎆 𓏺

   (c) 𓆐𓆐𓆐𓂭 𓍢𓍢𓍢 𓎆

6. Escreva os números 184, 627 e 1282 nos sistemas de numeração babilônico e egípcio.

7. Faça uma comparação entre as vantagens e as desvantagens dos sistemas de numeração babilônico e egípcio.

8. Usando reduções por $1/2$ e $1/3$, decomponha em frações unitárias a fração $2/51$.

9. Use o método egípcio da duplicação para calcular 27×15.

2

Grécia, período helênico

AULA 2: GRÉCIA, PERÍODO HELÊNICO

OBJETIVOS
Ao terminar a leitura desse capítulo, o leitor deverá ser capaz de:
1. Compreender a evolução filosófica que a matemática experimentou na Grécia.
2. Entender os sistemas de numeração usados na Grécia Antiga.
3. Entender como a noção de infinito apareceu na matemática.

2.1 Introdução

A civilização antiga que desempenhou o papel mais significativo na construção da matemática tal como a conhecemos foi a civilização grega. Seu florescimento, a partir do século VIII a.C., representou uma mudança no centro de gravidade do mundo civilizado dos vales dos grandes rios — Tigres e Eufrates (Mesopotâmia), e Nilo (Egito) — para as margens do mar Mediterrâneo. A cidade de Mileto, na Ásia Menor (atual Turquia), foi a principal cidade grega até o século VI a.C.. Porém, o apogeu da civilização grega ocorreu nos séculos V e IV a.C., quando Atenas passou a ser a capital da Grécia. Após as conquistas de Alexandre, o Grande, entre 334 e 327 a.C., Atenas perdeu progressivamente seu poder e Alexandria, no Egito, passou a ocupar o lugar de cidade mais importante do mundo grego. Teve início, nesse momento, o que é conhecido como período helenista da história grega, em oposição ao período anterior, chamado de helênico. A Grécia peninsular foi conquistada pelos romanos em 146 a.C., mas a civilização grega ainda teve sobrevida em Alexandria, que passou ao poder romano somente em 30 a.C.. Alexandria ainda cumpriria o papel de guardiã da cultura grega até sua tomada pelos muçulmanos em 641 d.C..

A evolução da matemática sofreu uma mudança de rumo na Grécia Antiga. Ela deixou de ser uma coleção de resultados empíricos e passou a ter o formato de uma ciência organizada, de maneira sistemática e por elementos racionais. A matemática, tanto na Mesopotâmia quanto no Egito, tinha caráter concreto e prático. Na Grécia, ela passou a ser essencialmente abstrata, com uma certa independência em relação às aplicações práticas. As demonstrações, instrumentos para garantir a validade dos resultados por argumentação puramente racional, foram introduzidas como parte fundamental de sua estrutura. Os gregos remodelaram a matemática e introduziram elementos que viriam a orientar a evolução dessa ciência pelos séculos seguintes da história humana.

Muito se sabe sobre a volumosa herança matemática deixada pela civilização grega. Ainda assim, uma compreensão mais acurada da dimensão dessa herança é limitada pelas fontes disponíveis. Dos matemáticos gregos pioneiros, tais como Tales de Mileto e Pitágoras, nenhum documento escrito chegou aos nossos dias. Sobre eles o que há são referências secundárias e indiretas, escritas, em geral, séculos depois. Algumas das obras dos grandes matemáticos gregos se perderam para sempre e sua existência foi registrada apenas em citações posteriores. Mesmo as grandes obras da matemática grega que sobreviveram ao tempo não chegaram até nós em suas versões originais, mas através de cópias de cópias, passando por traduções árabes e latinas.

2.2 Os sistemas de numeração gregos

Alguns sistemas de numeração foram usados na Grécia Antiga durante o primeiro milênio a.C.. Vamos analisar, em primeiro lugar, o *sistema de numeração ático*, usado em Atenas em seu período de apogeu. Também era conhecido por *sistema acrofônico*, pois o símbolo para cada número provinha da primeira letra de seu nome. Esse sistema era aditivo na base 10 e formado pelos seguinte símbolos básicos:

$\mathrm{I} = 1$	iota	$\mathrm{H} = 100$	hekaton
$\Gamma = 5$	penta	$\mathrm{X} = 1000$	khiloi
$\Delta = 10$	deka	$\mathrm{M} = 10000$	murioi

Os números 50, 500, 5000 e 50000 eram representados pela composição do símbolo referente a 5 com os símbolos para 10, 100, 1000 e 10000, respectivamente, como mostra o quadro a seguir:

$\Gamma^{\Delta} = 50$	$\Gamma^{\mathrm{H}} = 500$	$\Gamma^{\mathrm{X}} = 5000$	$\Gamma^{\mathrm{M}} = 50000$

Os demais números eram compostos pela combinação dos símbolos acima. Assim, os números de 1 a 4 são I, II, III, IIII. Alguns outros exemplos de números formados a partir desses:

$\Gamma\mathrm{I} = 6$	$\Delta\mathrm{II} = 12$	$\Delta\Delta\mathrm{III} = 23$	$\mathrm{XHH}\Gamma\mathrm{I}$ 1206
$\Gamma^{\Delta}\Delta\mathrm{II} = 62$	$\Gamma^{\mathrm{H}}\mathrm{H}\Gamma^{\Delta}\Delta\mathrm{II} = 662$	$\Gamma^{\Delta}\Delta\Delta\Gamma = 75$	$\mathrm{X}\Gamma^{\mathrm{H}}\mathrm{HH} = 1700$

Por não ser posicional, esse sistema de numeração não necessitava do zero para preencher os espaços vazios. O sistema ático, no entanto, não era uniforme no mundo grego, podendo sofrer variações de cidade para cidade.

O sistema de numeração ático foi progressivamente substituído pelo *sistema iônico* ou *sistema alfabético*, no qual os números eram representados por letras do alfabeto grego. Este sistema era de uso generalizado em Alexandria já no século III a.C., época em que os *Elementos* de Euclides, obra-prima da matemática grega, foram escritos. Neste sistema, as 24 letras do alfabeto grego eram usadas em conjunto com três letras, de origem fenícia, presentes no alfabeto grego antigo: ϛ (stigma), ϟ (qoppa) e ϡ (sampi). O quadro a seguir mostra as letras gregas e os números correspondentes escritos no sistema indo-arábico:

Unidades			Dezenas			Centenas		
α	alfa	1	ι	iota	10	ρ	rô	100
β	beta	2	κ	capa	20	σ	sigma	200
γ	gama	3	λ	lambda	30	τ	tau	300
δ	delta	4	μ	mi	40	υ	ípsilon	400
ϵ	épsilon	5	ν	ni	50	φ	fi	500
ϛ	stigma	6	ξ	csi	60	χ	chi	600
ζ	zeta	7	o	ômicron	70	ψ	psi	700
η	eta	8	π	pi	80	ω	omega	800
θ	teta	9	ϟ	qoppa	90	ϡ	sampi	900

No sistema iônico, cabia ao contexto definir se um conjunto de letras representa um número ou uma palavra. Para desfazer eventuais dubiedades, uma barra horizontal poderia ser sobreposta para distinguir o número da letra correspondente. Assim, o número 111 poderia ser grafado tanto como $\rho\iota\alpha$ quanto como $\overline{\rho\iota\alpha}$.

Os nove múltiplos de 1000 eram denotados pelas nove primeiras letras precedidas de um acento:

$$'\alpha = 1000,\ '\beta = 2000,\ '\gamma = 3000,\ \text{etc.}$$

Os múltiplos de dez mil, ou miríades, eram grafados com o símbolo M sobreposto ou precedido pela letra correspondente:

$$\overset{\beta}{\mathrm{M}} = \beta\mathrm{M} = 20000\ ,\ \overset{\gamma}{\mathrm{M}} = \gamma\mathrm{M} = 30000,\ \text{etc.}$$

Os símbolos básicos acima eram usados para compor os demais números, como nos exemplos:

$$\overset{\beta}{\mathrm{M}}\,\varphi\xi\alpha = 20561 \qquad '\epsilon\rho\mu = 5140 \qquad \zeta\mathrm{M}'\delta\sigma\eta = 74208$$

O sistema iônico se mostrava pouco eficaz para a escrita de frações. As frações unitárias podiam ser indicadas marcando o denominador com um acento:

$$\gamma\,' = \frac{1}{3} \qquad \mu\gamma\,' = \frac{1}{43} \ \text{ ou } \ 40\frac{1}{3}$$

O exemplo acima retrata a ambiguidade da notação usada. Mais uma vez, caberia ao contexto estabelecer seu significado. A escrita de frações ganhou uma forma mais eficiente com Diofanto de Alexandria, no século III d.C. Na notação de Diofanto, o denominador era sobreposto ao numerador, prenunciando a notação usada na matemática moderna:

$$\begin{matrix}\lambda\beta \\ \iota\gamma\end{matrix} = \frac{13}{32} \qquad \begin{matrix}\psi\lambda\beta \\ \sigma\iota\gamma\end{matrix} = \frac{213}{732} \qquad \begin{matrix}'\psi\lambda\beta \\ '\sigma\iota\gamma\end{matrix} = \frac{2013}{7032}$$

2.3 Tales de Mileto

O início do estudo sistemático da matemática na Grécia pode ser atribuído a Tales (c. 624-546 a.C.), nascido na cidade de Mileto, na Iônia, costa ocidental da Ásia Menor. Tales uniu o estudo da astronomia ao da geometria e da teoria dos números, fundando a chamada *Escola Ioniana*. Dois séculos após sua morte, Tales seria qualificado pelo filósofo Aristóteles como o primeiro filósofo de tradição grega.

Mileto, no tempo de Tales, era uma importante cidade comercial, estando conectada por rotas mercantis a outros pontos do Oriente. Tales foi comerciante quando jovem e viajou bastante em razão de sua ocupação. Ao visitar o Egito e a Mesopotâmia, tomou contato com a matemática desenvolvida nesses locais, o que supostamente lhe deu uma base de conhecimentos para atuar como matemático. Tales atuou ainda como político e, em idade mais avançada, como astrônomo.

Tales é considerado o criador da geometria dedutiva, sendo a ele atribuídas as primeiras demonstrações matemáticas. São admitidos como de Tales os resultados sobre figuras planas relacionados no quadro abaixo:

- Todo círculo é dividido em duas partes iguais por seu diâmetro.
- Os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais.
- O ângulo inscrito em um semicírculo é reto.
- Quando duas retas se interceptam, os ângulos opostos são iguais.
- Os lados de triângulos semelhantes são proporcionais.
- Dois triângulos são congruentes se possuem dois ângulos e um lado iguais.

Todos esses resultados parecem simples e intuitivos e alguns deles já eram conhecidos pelas civilizações pré-helênicas. São, no entanto, atribuídos a Tales, assim como a ele são atribuídas tentativas de demonstrá-los. Ocorre, com Tales, uma mudança de perspectiva no estudo da geometria. A geometria e a aritmética até então praticadas na Mesopotâmia e no Egito tinham caráter prático e se limitavam a aplicar procedimentos numéricos para resolver problemas específicos, sem maiores preocupações com a estrutura intelectual ou com os princípios filosóficos da matemática envolvida. A tradição clássica atribui a Tales de Mileto a primeira ação no sentido de organizar a geometria como estudo abstrato e dedutivo.

2.4 Pitágoras

A matemática da Grécia Antiga se desenvolveu em diversas escolas que sucederam umas às outras. A Escola Ioniana, de Tales de Mileto, perdeu gradativamente sua importância e foi suplantada pela *Escola Pitagórica*, cujo fundador foi Pitágoras (c. 570-495 a.C.). Nascido na ilha de Samos, também na Iônia e próxima a Mileto, Pitágoras, que teria sido aluno de Tales, realizou viagens em sua juventude e terminou por estabelecer-se na cidade de Crotona, na costa sudeste da Itália. Em Crotona, formou-se em torno de Pitágoras uma irmandade religiosa, filosófica e científica, uma escola de pensamento onde o racionalismo grego convivia com elementos de misticismo.

Assim como ocorre em relação à obra de Tales, inexistem fontes originais acerca da obra e da contribuição de Pitágoras e de seus seguidores. Dentro da escola de Pitágoras, a transmissão oral do conhecimento era tradição, o que certamente contribuiu para a escassez de fontes escritas. Muito do que se atribui a Pitágoras é baseado em relatos produzidos anos depois de seu tempo.

A Escola Pitagórica dava destaque a quatro campos do saber: aritmética, música, geometria e astronomia. A concepção pitagórica do universo era aritmética: “todas as coisas são números”, segundo Pitágoras. Os números, elementos básicos da filosofia pitagórica, eram tratados como entidades místicas e objeto de devoção.

O misticismo pitagórico atribuía aos números características e personalidades:

- O número um é a essência do número, o gerador de todos os outros números e o número da razão; nele está a origem de todas as coisas e do divino.
- O número dois é o primeiro número par ou número feminino, o número da opinião.
- O número três é o primeiro número masculino, o número da harmonia.
- O número quatro é o número da justiça.
- O número cinco é o número do casamento, por ser a união dos primeiros números feminino e masculino.

Um lugar sagrado é reservado ao número dez ou *tetractys*. Ele é considerado o número do universo, por ser a soma das dimensões geométricas: um ponto, que é o gerador de todas as dimensões; dois pontos, que determinam uma reta de dimensão um; três pontos não alinhados, que determinam um triângulo de dimensão dois; e, por fim, quatro pontos não contidos em um plano, que determinam um tetraedro de dimensão três. Desse modo, o número dez, que nos primórdios da evolução matemática nasce do método de contagem com os dedos, é produzido pelos pitagóricos por um processo puramente abstrato.

Os pitagóricos produziram famílias especiais de números a partir de motivações geométricas. São os chamados números triangulares, quadrados, pentagonais e assim por diante. A *Tétraktys* — o símbolo esotérico da seita pitagórica — corresponde ao número triangular 10, representado na Figura 2.1.

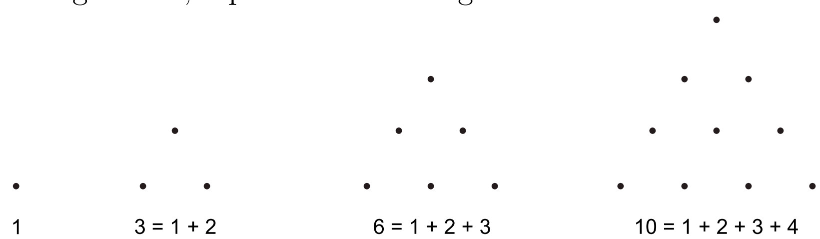


Figura 2.1: Números triangulares.

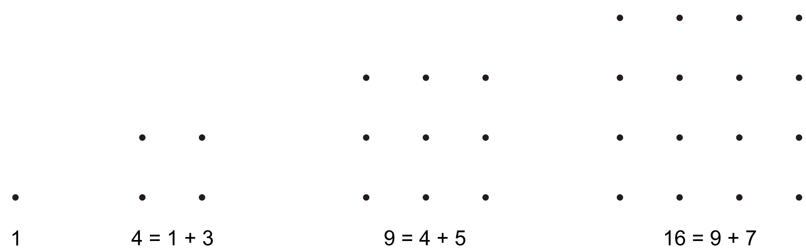


Figura 2.2: Números quadrados.

A filosofia pitagórica dava aos números inteiros o poder de descrever o mundo. Essa concepção, porém, sofreu um grande abalo com a descoberta das grandezas incomensuráveis, que a história da matemática atribui aos pitagóricos. O número hoje conhecido por $\sqrt{2}$ pode ter sido obtido de duas formas distintas. De uma maneira geométrica, ao se calcular a diagonal do quadrado de lado 1. Ou ainda, de uma forma puramente aritmética, obtendo-se a média geométrica entre a unidade e duas vezes a unidade, ou seja, $1/x = x/2$. O número assim produzido e a unidade são incomensuráveis, ou seja, inexiste uma unidade básica a partir da qual ambos podem ser obtidos como múltiplos inteiros. Tal descoberta, talvez a mais importante descoberta matemática da época, entrou em choque com a visão mística que Pitágoras tinha dos números, a ponto de colocar em dúvida a adequação de sua concepção numérica do universo. Pela primeira vez na história a matemática viveu uma crise em seus fundamentos.

Pitágoras propunha teoremas do ponto de vista abstrato e intelectual e, sem dúvida, o resultado mais famoso atribuído à Escola Pitagórica é o que hoje conhecemos como Teorema de Pitágoras: as medidas a e b dos catetos e a medida c da hipotenusa de um triângulo retângulo satisfazem $a^2 + b^2 = c^2$. Esse resultado já era conhecido na geometria da Mesopotâmia e do Egito e não existem evidências de que Pitágoras ou seus seguidores tenham trabalhado nele. De todo modo, também não há evidências de outros trabalhos matemáticos dos pitagóricos e muito do que lhes é atribuído provém de uma tradição que remonta à antiguidade clássica.

Após um levante popular, o templo de Pitágoras em Crotona foi destruído e sua irmandade deixou de existir como um grupo ativo e organizado. Muitos de seus seguidores, espalhados pelo mundo helênico, ainda mantiveram suas atividades por mais dois séculos. Acredita-se que Pitágoras tenha sido o primeiro homem a denominar-se "filósofo", ou seja, amante da sabedoria. As ideias pitagóricas viriam a influenciar Platão e, através deste, toda a filosofia ocidental.

2.5 Os Eleatas

Parmênides (séc. V a.C.), nascido na cidade grega de Eleia, no sul da Itália, foi o fundador da chamada *Escola de Eleia*. Parmênides foi o primeiro filósofo grego a fazer uma distinção rigorosa entre o sensível e o inteligível, estimulando o confronto entre a experiência e a razão. Os filósofos de sua escola, conhecidos como eleatas, se opuseram à concepção numérica do universo defendida pelos pitagóricos que, ao associar números inteiros aos objetos físicos, discretizava o universo. A descoberta das grandezas incomensuráveis revelou a existência de grandezas contínuas, de natureza geométrica, como comprimentos, áreas e volumes, que não podiam ser concebidos como coleções discretas de unidades. Os eleatas tentaram incorporar tais grandezas ao universo matemático ao considerá-las como compostas por uma coleção infinita de objetos muito pequenos. Nesse contexto, a noção de infinito fez sua estreia na matemática grega. Surgiu a semente de uma ideia que, séculos mais tarde, teria papel fundamental no desenvolvimento do conceito de continuidade e da teoria do cálculo diferencial e integral.

Zenon de Eleia (c. 490-430 a.C.) foi um seguidor de Parmênides. Seus argumentos são provavelmente o primeiro exemplo de demonstração por redução ao absurdo. Zenon criou alguns paradoxos que retratam o mal estar gerado entre os pensadores gregos pelas noções de infinito e contínuo, em oposição ao finito e discreto. Estão aí em choque duas concepções matemáticas: a *continuísta*, que pensava o número, o espaço e o tempo como divisíveis ao infinito, e a *atomista*, que propunha a existência de elementos básicos indivisíveis. Os paradoxos de Zenon produziram impasses para qualquer uma das duas concepções.

Paradoxo de Aquiles e da tartaruga

Aquiles, disputando uma corrida com a tartaruga, permite que esta largue na frente. Enquanto ele percorre a distância que o separava da tartaruga no início da corrida, ela avança mais um pouco. A distância entre Aquiles e a tartaruga diminui, mas a tartaruga permanece em vantagem. Na etapa seguinte, Aquiles percorre a distância que o separa da tartaruga e esta avança mais um pouco. Esse processo continua sucessivamente, de forma que Aquiles nunca conseguirá ultrapassar a tartaruga.

O paradoxo acima se opõe à divisibilidade infinita do espaço. O que está em sua essência é a dificuldade em somar uma quantidade infinita de parcelas progressivamente menores e, ainda, a dificuldade em aceitar que essa soma possa resultar em um número finito.

O seguinte paradoxo também se opõe à concepção continuísta do espaço:

Paradoxo da dicotomia

Antes de percorrer toda a extensão de uma reta, um objeto em movimento deve percorrer a metade desta reta. Na etapa seguinte, o objeto deve percorrer a metade da metade da reta. Analisando as etapas sucessivas de modo similar, chega-se à conclusão de que o movimento nunca poderia ser concluído. O movimento é, portanto, ilusório. Usando instrumentos da matemática moderna, esse paradoxo é desfeito ao considerar a série

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots,$$

cuja soma vale 1.

Para se contrapor à concepção atomista, Zenon propõe o chamado paradoxo da flexa:

Paradoxo da flecha

Suponha que o espaço e o tempo sejam formados por elementos indivisíveis, chamados respectivamente de "pontos" e "instantes". Uma flecha, seguindo uma trajetória, ocupa um certo ponto em um determinado instante e, portanto, está em repouso. Se isso é verdade em cada instante de seu voo, a flecha não pode estar em movimento. Nesse caso, o que está em jogo é a noção de velocidade instantânea. Qual é o valor da razão $\Delta x/\Delta t$, da distância percorrida sobre o intervalo de tempo correspondente, se Δt assume valores muito pequenos? A concepção atomista não tinha como lidar com esse problema, que teria um tratamento satisfatório apenas quando a velocidade instantânea pudesse ser definida como $\lim_{\Delta t \to 0} \Delta x/\Delta t$. Isso aconteceria apenas com a introdução da noção de limite na teoria do cálculo diferencial e integral, dois milênios mais tarde.

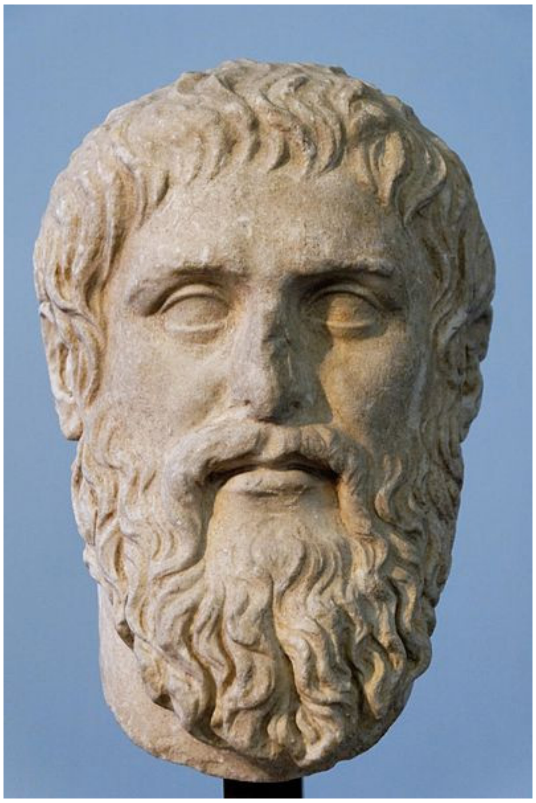


Figura 2.3: Cópia de uma imagem de Platão feita para a Academia de Athenas em c. 370 a.C. — *Musei Capitolini*.

2.6 A Academia de Platão

O mundo helênico se estruturava em cidades, ou *polis*, com *status* de pequenos Estados autônomos. Nelas, a partir do final do século VI a.C., surgiu o sistema democrático, no qual o poder se apoiava na comunidade dos cidadãos — homens livres, não escravos — que participavam diretamente das decisões. No século V a.C., Atenas consolidou-se como o principal centro econômico e cultural do mundo helênico, transformando-se também no principal exemplo de democracia. O debate público inerente ao sistema democrático estimulou o compartilhamento de conhecimentos e sistemas de pensamento, criando um incentivo para a formação filosófica e cultural de seus cidadãos. A primeira grande escola filosófica ateniense foi a dos *sofistas*, professores ambulantes que vendiam seus conhecimentos e treinavam cidadãos para os confrontos verbais que aconteciam nas assembleias públicas.

Atenas seria palco da mais decisiva contribuição para a estruturação da matemática na Grécia Antiga, dada pelo filósofo Platão (c. 427-347 a.C.). Perto do ano de 377 a.C., Platão fundou em Atenas uma escola, a *Academia*, que durante um século dominaria a vida filosófica da cidade. A Academia era um espaço destinado ao estudo, pesquisa e ensino da filosofia e da ciência, e talvez tenha sido o primeiro exemplo de instituição de ensino e pesquisa de alto nível. Platão atribuía uma importância especial à matemática e a incluiu no rol das disciplinas indispensáveis para a formação intelectual do cidadão. Não há evidências de contribuições técnicas de Platão à matemática. No entanto, ele fez de sua Academia o centro de atividade matemática mais importante de seu tempo, contando com matemáticos de destaque entre seus alunos e colaboradores. Platão herdou de Pitágoras a ideia de que a matemática estruturava o universo. Tinha, no entanto, uma concepção geométrica, contrastando com a concepção aritmética pitagórica. Relata-se que a frase "que não entre aqui aquele que não é geômetra" estava inscrita sobre o pórtico de sua escola, um retrato do lugar de destaque reservado à matemática em seu pensamento e em sua Academia.

Platão, ao questionar a respeito da estrutura e da natureza da matemática, criou novas referências para sua compreensão e desenvolvimento. Mostrou ter consciência sobre o caráter abstrato dos objetos matemáticos ao distinguir o "mundo real", onde vivem os objetos sensíveis, do "mundo das ideias", alcançado através da razão. Para Platão, os objetos sensíveis são suscetíveis a mutações, enquanto seus modelos abstratos são imutáveis, eternos e universais. Na matemática, o interesse está nas figuras abstratas e não em suas representações reais. Na visão de Platão, a matemática constitui um domínio independente e autossuficiente, acessível através do entendimento, cujas verdades podem ser conhecidas *a priori*, independente dos sentidos. Isso influenciou na noção de demonstração, onde apenas o uso do raciocínio dedutivo passou a ser permitido, ficando proibido o recurso à experiência sensível. A filosofia grega procurava a verdade eterna e imutável e assim também deveria proceder a matemática.

No tempo de Platão, três célebres problemas receberam a atenção dos matemáticos: a duplicação do cubo, a trisseção do ângulo e a quadratura do círculo. A reta e o círculo eram figuras geométricas básicas para os geômetras gregos. Por isso, somente eram permitidas soluções que pudessem ser construídas usando exclusivamente a régua e o compasso. Os três problemas são enunciados a seguir:

Duplicação do cubo. Encontrar o lado x de um cubo que tem como volume duas vezes o volume de um cubo de lado a. Ou seja, propõe-se encontrar x tal que $x^3 = 2a^3$. O problema equivale, portanto, a encontrar o valor $\sqrt[3]{2}$ usando régua e compasso.

Trisseção do ângulo. Dado um ângulo θ, encontrar, usando a régua e o compasso, o ângulo $\theta/3$.

Quadratura do círculo. Encontrar o lado x de um quadrado que tenha a mesma área de um círculo de raio r. Ou seja, trata-se de resolver a equação $x^2 = \pi r^2$, o que equivale a determinar o valor de π usando régua e compasso.

Esses problemas viriam a desafiar os matemáticos por mais de dois milênios, a ponto de a expressão "quadratura do círculo" ter se tornado sinônimo de problema impossível de ser resolvido. Demonstrações para a impossibilidade de resolver esses problemas seriam produzidas apenas no século XIX.

2.7 Eudoxo e o método de exaustão

Um dos grandes nomes que militaram na Academia de Platão foi o de Eudoxo de Cnidus (c. 408-355 a.C.), aluno e colaborador de Platão que se transformou no maior matemático e astrônomo de seu tempo. Eudoxo estabeleceu uma teoria de proporções, que viria a ser tratada no livro V dos *Elementos* de Euclides.

> Em linguagem moderna, a definição de Eudoxo para grandezas em razão era feita do seguinte modo: $a/b = c/d$ (ou seja, a está para b na mesma razão que c está para d) se, e somente se, dados quaisquer dois inteiros m e n, vale
>
> - se $ma < nb$, então $mc < nd$;
> - se $ma = nb$, então $mc = nd$;
> - se $ma > nb$, então $mc > nd$.

A definição de Eudoxo tinha o mérito de poder lidar com proporções envolvendo grandezas incomensuráveis e, de certa forma, foi uma resposta à crise provocada pelo descobrimento dessas grandezas pelo pitagóricos. Eudoxo conseguiu incorporar os incomensuráveis à sua teoria de proporções fazendo uso apenas de relações envolvendo números inteiros. Assim, mesmo sem ter os instrumentos para trabalhar com o infinito, Eudoxo produziu um método eficiente para dar demonstrações satisfatórias para resultados envolvendo proporções.

A grande contribuição de Eudoxo para o desenvolvimento da matemática — que pode ser considerada o primeiro passo no caminho que conduziria à teoria do cálculo diferencial e integral — esteve no cálculo de comprimentos, áreas e volumes de figuras curvilíneas, através de seu *método de exaustão*. A ideia de calcular medidas de figuras definidas por curvas usando polígonos inscritos com um grande número de lados já existia. No entanto, foi Eudoxo quem forneceu as ferramentas técnicas para executar esse tipo de procedimento de maneira rigorosa. O *Postulado de Eudoxo*, hoje conhecido como *Propriedade de Arquimedes*, diz o seguinte: dadas duas grandezas não nulas a e b, existe um inteiro m tal que $ma > b$. A partir desse postulado, é simples provar o resultado que estava na base do método de exaustão, o qual em linguagem moderna se expressa como:

Se M é uma grandeza dada, e r é um número com $1/2 < r < 1$, então, dado $\epsilon > 0$, existe um inteiro n_0 tal que $M(1-r)^n < \epsilon$ para todo $n \geq n_0$.

Isso equivale a dizer que $\lim_{n\to\infty} M(1-r)^n = 0$, mas, como já salientamos, a noção de limite só apareceria muitas centenas de anos mais tarde.

No que diz respeito ao cálculo de comprimentos, áreas e volumes, o interesse de Eudoxo não residia em seu cálculo absoluto, pois a existência dos números incomensuráveis tornava impossível a existência de uma unidade de medida satisfatória.

Para evitá-los, os resultados envolvendo medidas de figuras geométricas propunham o cálculo da razão de medidas de figuras conhecidas. Um resultado conhecido de Eudoxo, cuja demonstração está no livro XII dos *Elementos* de Euclides, diz que as áreas de dois círculos estão em proporção em razão igual aos quadrados dos seus diâmetros. Isso é provado inscrevendo, nos dois círculos dados, polígonos regulares com o mesmo número de lados, cuja razão das áreas é conhecida. O resultado é obtido empregando o Postulado de Eudoxo, assim como sua definição de proporção. No método de Eudoxo, ao contrário do que a terminologia "método de exaustão" possa sugerir, não se chega a "exaurir" a figura dada. Na realidade, era feito um processo de aproximação, seguido por uma dupla redução ao absurdo, provando que a grandeza procurada não podia ser nem menor nem maior que um determinado valor. O método de Eudoxo conseguia, assim, contornar a inexistência de uma noção de limite.

2.8 Aristóteles

Figura 2.4: *A Escola de Atenas*, afresco de Rafael Sanzio de 1509. Aristóteles, à direita, gesticula em direção ao chão, indicando sua crença na experiência e observação empírica, enquanto Platão, à esquerda, aponta para o céu — *Palazzi Pontifici*, Vaticano.

Aristóteles (384-322 a.C.) foi o discípulo mais famoso de Platão, tendo estudado e trabalhado em sua Academia. Aristóteles foi tutor de Alexandre, o Grande, e teria sido professor de outro futuro rei, que viria a ter um papel essencial na ciência do mundo clássico, Ptolemeu Sóter.

Aristóteles discordava de seu mestre em relação à natureza da matemática e de seus objetos. Para Aristóteles, as formas geométricas e numéricas não existem como entidades independentes do mundo real. Os objetos matemáticos existem como abstração dos objetos reais, mas sua existência depende da existência do próprio objeto. Aristóteles tem uma visão empirista que contrasta com a visão racionalista de Platão, na qual os entes matemáticos têm vida independente no "mundo das ideias". Para Aristóteles, o que a matemática faz é abstrair certos aspectos dos objetos físicos e estudar essas abstrações. Por exemplo, ao representar uma bola do mundo real por uma esfera matemática perfeita, um objeto matemático abstrato, considera-se apenas a propriedade — satisfeita de forma imperfeita — de que os pontos da bola são equidistantes de seu centro. A visão aristotélica da matemática tem o mérito de favorecer sua aplicabilidade, pois a matemática é, em essência, uma maneira de descrever o mundo sensível.

Segundo Aristóteles, é fundamental para o conhecimento produzir um discurso capaz de explicá-lo de acordo com certas regras. Essas regras foram estabelecidas através da lógica formal, criada e sistematizada por esse filósofo. Aristóteles entendia uma ciência dedutiva como um edifício estruturado por verdades encadeadas através de relações lógicas, fundado sobre alguns pressupostos fundamentais não demonstrados. Na Grécia Clássica, esse modelo teria a sua melhor materialização nos *Elementos* de Euclides, onde um corpo significativo de resultados sobre geometria e aritmética é produzido tendo como ponto de partida um conjunto pequeno de axiomas e postulados básicos. O modelo aristotélico de lógica foi dominante no Ocidente até o século XIX, quando ele foi incorporado à moderna lógica formal.

Aristóteles analisou a noção do infinito e o classificou em duas formas: o *infinito atual* e o *infinito potencial*. O primeiro seria uma quantidade infinita acabada, enquanto o segundo, uma quantidade finita que poderia aumentar indefinidamente. Para Aristóteles, bastaria aos matemáticos o infinito potencial. É essa noção que viria a ser usada na construção do conceito de limite na teoria do cálculo, muito embora a matemática moderna tenha incorporado, em diversas situações, o infinito atual.

Aristóteles analisou e esclareceu noções matemáticas fundamentais, como as de axioma, definição, hipótese e demonstração. Criticou as demonstrações por redução ao absurdo, já presentes no método de exaustão de Eudoxo. Segundo Aristóteles, essas demonstrações eram não explicativas: sabia-se que um fato era verdade apenas por ser verdade. Sua posição viria a criar, ao longo da história da matemática, certas predileções na busca por demonstrações diretas.

Aristóteles, assim como Platão, não produziu resultados nem teorias matemáticas. No entanto, suas contribuições no campo da filosofia influenciaram de forma marcante a maneira como a matemática seria construída nos séculos vindouros.

2.9 Exercícios

1. Faça uma comparação entre os sistemas de numeração gregos e aqueles usados no Egito e na Mesopotâmia.

2. Escreva os números 185, 1437, 63.829 nos sistemas de numeração ático e iônico.

3. Escreva, usando o sistema indo-arábico, os seguintes números, expressos no sistema ático:

   (a) X𐅅HHHHΔIII

   (b) 𐅇M XXX𐅄ΔΓI

   (c) 𐅆XX𐅅HΔΔΔΓIII

4. Escreva, usando o sistema indo-arábico, os seguintes números, expressos no sistema iônico:

   (a) ϛM $'\eta\chi\mu\theta$

   (b) $'\delta\phi\xi\theta$

   (c) $\overset{\zeta}{\mathrm{M}}\ \pi\alpha$

5. Faça desenhos representando os quatro primeiros números pentagonais e hexagonais. Todos esses números poligonais são gerados por uma progressão aritmética cujo primeiro termo é 1. Determine a razão dessa progressão para os números triangulares, quadrados, pentagonais e hexagonais.

6. Mostre que se a e b são dois números comensuráveis, ou seja, se existe uma unidade básica a partir da qual a e b podem ser obtidos como múltiplos inteiros, então a/b é um número racional.

7. No paradoxo de Aquiles e da tartaruga, suponha que ambos corram em uma reta com velocidade constante, sendo a velocidade de Aquiles v_a e a velocidade da tartaruga igual a ϵv_a, onde $0 < \epsilon < 1$. Supomos que Aquiles parte da posição $d = 0$, enquanto a tartaruga inicia a corrida na posição $d = d_0 > 0$.

   (a) Encontre a posição da tartaruga no instante em que Aquiles atinge a posição $d = d_0$.

   (b) Encontre a posição da tartaruga no instante em que Aquiles atinge a posição ocupada por ela no final da primeira etapa do movimento.

   (c) Fazendo de forma indutiva os cálculos para as etapas seguintes do movimento, escreva a série cuja soma é a posição onde Aquiles ultrapassa a tartaruga.

8. Comente e dê exemplos que ilustrem a seguinte frase, presente no texto, a respeito da filosofia de Platão: "Para a matemática, o interesse está nas figuras abstratas, e não em suas representações reais".

9. Descreva as diferenças básicas entre as concepções filosóficas da matemática de Platão e de Aristóteles.

10. Explique porque a definição dada por Eudoxo para grandezas em razão coincide com a noção moderna (use a possibilidade de aproximar qualquer número real por números racionais).

11. Faça uma experimentação no campo do método de exaustão:

    (a) Mostre que a área de um polígono regular de n lados inscrito em um círculo de raio r vale
    $$A_n = \frac{r^2 n}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right).$$

    (b) Calcule a área do círculo fazendo $\lim_{\to\infty} A_n$ (isso já não é método de exaustão, mas sim teoria do cálculo!).

3

Grécia, período helenista

AULA 3: GRÉCIA, PERÍODO HELENISTA

OBJETIVOS
Ao terminar a leitura desse capítulo, o leitor deverá ser capaz de:
1. Entender a estrutura geral dos *Elementos* de Euclides.
2. Entender as principais contribuições à matemática de Arquimedes, Apolônio, Ptolemeu e Diofanto.

3.1 Introdução

O século IV a.C. foi marcado pela conquista da Grécia por Felipe II da Macedônia e pelo fim da autonomia e da democracia nas cidades gregas. O filho e sucessor de Felipe, Alexandre, conhecido como o Grande, expandiu e unificou o império grego. Ao conquistar o Egito, em 332 a.C., fundou, às margens do Mediterrâneo, a cidade de Alexandria, que se tornou a capital de seu império. Alexandria viria a ocupar o lugar de Atenas como principal polo de conhecimento e cultura do mundo grego. Com a morte de Alexandre, em 323 a.C., Ptolemeu Sóter (323-283 a.C), um de seus generais, se estabeleceu como rei do Egito, dando início a uma dinastia.

Um ato de Ptolemeu I como governante do Egito teria consequências decisivas para a história da ciência: a fundação, em Alexandria, de uma instituição de estudo e ensino denominada *Museu*, o "templo das Musas" — deusas que, na mitologia grega, inspiravam as criações literária e artística. Contando com o apoio da família real dos Ptolemeu, o Museu de Alexandria atraiu sábios do mundo inteiro e, pelos seis séculos seguintes, seria o principal centro de produção científica da humanidade. O Museu era dotado de uma biblioteca, criada com a missão de reunir todo o conhecimento disponível no mundo antigo, cujo acervo chegou a dispor de mais de 700.000 rolos de papiro. O Museu de Alexandria foi palco para o estudo de diversas disciplinas, dentre elas a literatura, a medicina e a astronomia, com um destaque especial para a matemática. Na órbita do Museu, a matemática grega teve o seu período áureo no século III a.C, notabilizando-se tanto pelos avanços técnicos e conceituais, quanto pelo magnífico trabalho de sistematização de conhecimentos, cujos resultados mais visíveis estão nos *Elementos* de Euclides.

3.2 Os *Elementos* de Euclides

Os *Elementos de Geometria*, de Euclides, representaram o apogeu da produção matemática na Grécia clássica. Esta foi a mais brilhante obra matemática grega e um dos textos que mais influenciaram o desenvolvimento da matemática e da ciência. Foi um dos livros mais editados e lidos em toda a história, tendo sido usado como livro-texto no ensino de matemática até o final do século XIX e início do século XX.

Os *Elementos* foram produzidos como um livro-texto, de caráter introdutório, cobrindo o que era considerado, na época, matemática elementar. A obra não se propunha a expor de forma exaustiva o conhecimento matemático de então ou a relatar resultados mais recentes e sofisticados. Euclides não foi o pioneiro na produção de livros-texto de geometria: Hipócrates de Quíos (c. 470-410 a.C.) escreveu, mais de um século antes de Euclides, o primeiro livro-texto organizado de forma sistemática sobre geometria, do qual sobreviveram apenas fragmentos.

Considerando a importância de sua obra, pouco é conhecido sobre a vida de Euclides, onde e quando nasceu, ou sobre as circunstâncias de sua morte. Sabe-se que viveu no século III a.C. em Alexandria, durante o reinado de Ptolemeu I, e que esteve dentre os estudiosos que foram convidados para trabalhar no Museu de Alexandria. Pelas evidências que temos, não há descobertas matemáticas atribuídas a Euclides e sua contribuição foi sobretudo no âmbito da compilação e da sistematização do conhecimento matemático. No entanto, há muito de originalidade em seu trabalho, tanto na forma de exposição quanto na estrutura das demonstrações.

Euclides foi herdeiro de uma tradição matemática iniciada na Grécia pelo menos três séculos antes. Os *Elementos* incorporaram as ideias de Platão quanto à natureza abstrata dos objetos matemáticos, mas sobretudo as de Aristóteles no que diz respeito à estrutura do conhecimento matemático e dos elementos lógicos usados em sua construção. A obra é rigorosa quanto à estrutura lógica, criteriosa na escolha das noções básicas — definições, axiomas e postulados admitidos sem demonstração — e clara nas demonstrações de proposições mais complexas a partir das mais simples. É um perfeito retrato do caráter abstrato e dedutivo da matemática grega.

Os *Elementos* são compostos de treze livros ou capítulos. Não é certo que tenham resultado do trabalho exclusivo de Euclides. Possivelmente, a obra foi fruto da colaboração de uma equipe de matemáticos coordenada por ele. Os primeiros quatro livros tratam de geometria plana elementar e estudam propriedades de figuras retilíneas e do círculo, abordando problemas cuja solução se faz com régua e compasso. O livro V aborda a teoria de proporções e o livro VI aplica essa teoria ao estudo de geometria. Os livros VII, VIII e IX versam sobre a teoria dos números. O livro X trata dos incomensuráveis e os livros XI, XII e XIII discorrem sobre geometria sólida.

3.2.1 Livro I

A maior parte do conteúdo do livro I é conhecida por quem estuda geometria plana na escola: teoremas de congruência de triângulos, construções elementares com régua e compasso, desigualdades envolvendo ângulos e lados de triângulos, construções envolvendo retas paralelas. São apresentados definições e conceitos a serem usados no decorrer da obra. O livro I começa com 23 definições de forte conteúdo intuitivo, estabelecidas tendo a realidade física como referência. No quadro abaixo, apresentamos algumas delas:

Figura 3.1: Iluminura do século XIV, em uma tradução latina dos *Elementos* de Euclides, atribuída a Adelardo de Bath; a figura feminina no papel de professora é provavelmente uma personificação da geometria — *The British Library*.

Definição 1. Um ponto é aquilo que não contém nenhuma parte.

Definição 2. Uma linha é um comprimento sem largura.

Definição 4. Uma linha reta é aquela que está igualmente colocada entre seus pontos.

Definição 5. Uma superfície é aquela que tem comprimento e largura somente.

Definição 8. Um ângulo plano é a inclinação, uma em relação à outra, de duas retas em um plano que se encontram e que não se encontram em uma linha reta.

Definição 10. Quando uma linha reta encontrando uma linha reta forma ângulos adjacentes iguais um ao outro, cada um dos ângulos é reto, e a linha reta encontrando a outra é chamada de perpendicular àquela que ela encontra.

Definição 15. Um círculo é uma figura plana contida em uma única linha (chamada de circunferência) tal que todas as linhas retas radiadas em direção à circunferência do ponto dentre aqueles dentro da figura são iguais umas as outras.

Definição 16. E o ponto é chamado de centro do círculo.

Definição 17. E o diâmetro do círculo é qualquer linha reta, desenhada através do centro, e terminando em cada direção na circunferência do círculo. E qualquer uma delas também corta o círculo na metade.

Essas definições são seguidas de cinco *postulados*:

1) *Traçar uma linha reta de uma ponto a outro ponto.*

2) *Prolongar continuamente uma linha reta finita em uma reta.*

3) *Descrever um círculo, dados um centro qualquer e um raio qualquer.*

4) *Todos os ângulos retos são iguais.*

5) *Se uma reta, caindo sobre duas retas, forma ângulos interiores do mesmo lado menores que dois retos, essas retas, prolongadas ao infinito, se encontrarão nos lados onde os dois ângulos são menores que dois retos.*

Além dos postulados são dadas cinco *noções comuns* ou *axiomas*:

1)*Coisas que são iguais à mesma coisa também são iguais uma a outra.*

2) *Se iguais são adicionados a iguais, então os totais são iguais.*

3) *Se iguais são subtraídos de iguais, então os restos são iguais.*

4) *Coisas que coincidem umas às outras são iguais umas às outras.*

5) *O todo é maior que a parte.*

Segundo Aristóteles, os axiomas eram "indispensáveis de conhecer para aprender qualquer coisa", eram verdades comuns a todos os estudos e tinham validade geral. Os postulados seriam menos óbvios, não pressupondo conhecimento prévio, uma vez que se aplicavam apenas ao objeto em estudo — a geometria, no caso. Essa ideia aristotélica é usada por Euclides ao separar seus postulados dos axiomas. A matemática moderna, no entanto, não faz distinção entre os dois conceitos.

Os postulados e axiomas do livro I dos *Elementos* asseguram a existência de figuras geométricas básicas, tais como a reta e o círculo, a partir das quais as outras figuras geométricas são construídas. Além disso, eles determinam propriedades do que hoje chamamos de *geometria euclidiana*: o espaço é homogêneo e infinito (toda reta finita pode ser prolongada continuamente, dois ângulos retos são iguais, as figuras geométricas não são modificadas por deslocamento). Além do mais, há a possibilidade de medir distâncias, uma vez que vale o Teorema de Pitágoras, provado em conjunto com seu recíproco no final do livro I.

Os *Elementos* têm sequência com a apresentação de proposições, sempre acompanhadas de demonstrações construídas de forma lógica a partir dos postulados, axiomas e das proposições já demonstradas. Começam com o seguinte resultado:

Proposição I.1. *Construir um triângulo equilátero em uma linha reta finita dada.*
Seja AB a linha reta finita dada. Então é requerido construir um triângulo equilátero sobre a linha reta AB. Desenhe o círculo BCD com centro A e raio AB (Postulado 3), e ainda o círculo ACE com centro B e raio BA (Postulado 3). E faça com que as linhas retas CA e CB sejam unidas do ponto C, onde os círculos cortam um ao outro, aos pontos A e B, respectivamente (Postulado 1). E como o ponto A é o centro do círculo CDB (Definição 15). Ainda, como o ponto B é o centro do círculo CAE, BC é igual a BA (Definição 15). Mas CA também foi mostrado ser igual a AB. Logo, CA e CB são iguais a CB. Mas coisas iguais à mesma coisa também são iguais umas às outras (Noção comum 1). Logo, CA também é igual a CB. Logo, as três linhas retas CA, AB e BC são iguais umas às outras. Logo, o triângulo ABC é equilátero e foi construído sobre a linha reta finita AB dada, que foi exatamente a coisa pedida para ser feita.

Na demonstração da Proposição I.1 acima, Euclides assume que os dois círculos se interceptam. De fato, sua obra admite a natureza contínua do plano. Esse é um exemplo de inconsistência presente em sua geometria, que seria fundamentada em bases sólidas apenas no final século XIX.

Uma discussão fundamental suscitada pelo livro I dos *Elementos* de Euclides diz respeito ao estudo de retas paralelas. Euclides prova a seguinte proposição:

Proposição I.29. *Uma reta que cai sobre retas paralelas faz ângulos alternos iguais entre eles, o externo igual ao interno e ao oposto, e a soma dos internos do mesmo lado igual a dois ângulos retos.*

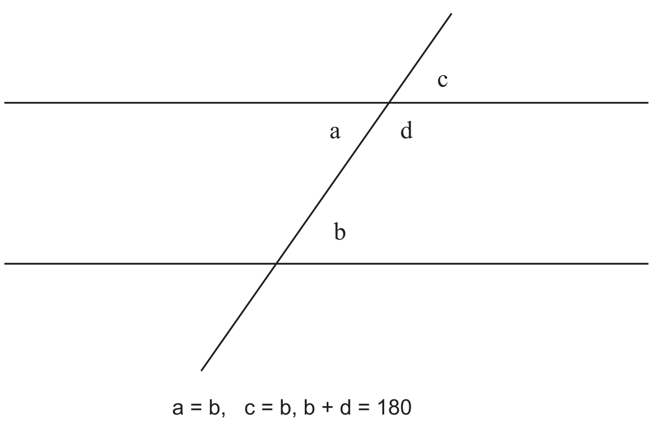


Figura 3.2: Proposição I.29.

Na demonstração da Proposição I.29, é usado o Postulado 5, conhecido como “postulado das paralelas”. A partir da Proposição I.29, Euclides prova que por um ponto fora de uma reta passa uma única reta paralela a uma reta dada. Esse resultado é usado, em seguida, na demonstração de que a soma dos ângulos de um triângulo é igual a dois retos.

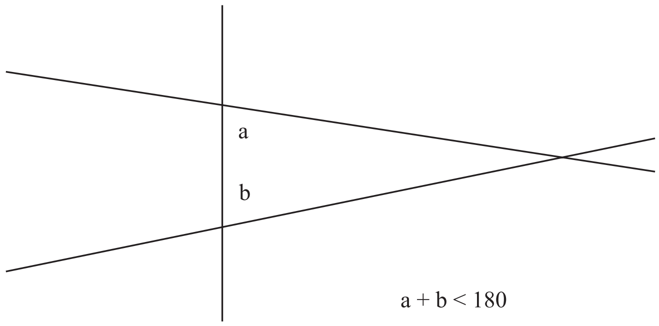


Figura 3.3: O postulado das paralelas.

O postulado das paralelas ocupa um lugar especial na construção euclidiana. O seu caráter peculiar, diferindo dos quatro outros postulados pelo aspecto mais complexo de sua formulação, chama a atenção. Ao longo dos séculos, foram levantadas dúvidas sobre sua necessidade, especulando-se que ele poderia ser provado a partir dos outros postulados e, assim, seria apenas mais uma proposição dentro da construção euclidiana. Essas dúvidas foram desfeitas apenas no século XIX, com a criação das geometrias não-euclidianas e o trabalho de fundamentação da geometria. O postulado das paralelas é, de fato, necessário na geometria de Euclides.

3.2.2 Livros II, III e IV

O livro II é curto, contém apenas 13 proposições, e se ocupa de um assunto conhecido hoje como álgebra geométrica. A álgebra, com seus artifícios simbólicos de representação e manipulação, só seria desenvolvida a partir da Idade Média. Euclides prova resultados de natureza algébrica de forma geométrica, com o uso de quadrados e retângulos. Por exemplo, enuncia e prova o seguinte resultado:

Proposição II.4. *Se uma linha reta for cortada aleatoriamente então o quadrado do todo é igual aos quadrados das partes e duas vezes o retângulo contido pelas partes.*

Traduzindo para linguagem moderna, o enunciado propõe demonstrar a relação $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Soluções de alguns tipos de equações quadráticas também são apresentadas por meio da manipulação de áreas de quadrados e retângulos. Os gregos já sabiam da existência de grandezas incomensuráveis e ainda não dispunham da noção de números reais para tratá-las. Desse modo, uma abordagem geométrica para problemas que hoje se acham dentro do domínio da álgebra parecia aos matemáticos gregos mais geral do que um tratamento puramente aritmético.

Os livros III e IV lidam com a geometria do círculo, material que possivelmente tem origem em Hipócrates de Quíos. O livro III inclui relações de interseção e tangências entre círculos e retas. Apresenta uma definição de tangente ao círculo da seguinte forma: “Uma linha reta que toca o círculo é qualquer linha reta que, encontrando o círculo, não corta o círculo”. No livro IV são tratados problemas sobre a inscrição e a circunscrição de figuras retilíneas no círculo.

3.2.3 Livros V e X

O livro V aborda a teoria de proporções de Eudoxo e o livro X versa sobre os incomensuráveis. A matemática grega tendia a evitar proporções. Grandezas em razão da forma $x : a = b : c$ eram tratadas geometricamente como uma igualdade de áreas do tipo $cx = ab$. A teoria de Eudoxo, uma das mais finas construções da matemática grega, contornou o problema da existência de incomensuráveis e colocou sobre bases sólidas toda a teoria geométrica envolvendo proporções. Ela é incorporada aos *Elementos* para ser aplicada nos livros subsequentes.

O livro X faz uma classificação sistemática de segmentos de reta incomensuráveis da forma

$$\sqrt{a} \pm \sqrt{b},\ \sqrt{a \pm \sqrt{b}} \text{ e } \sqrt{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$$

onde a e b são comensuráveis. O tratamento geométrico dispensado a esses objetos fazia Euclides considerar este como mais um livro de geometria.

3.2.4 Livros VII, VIII e IX

Esses livros são devotados à teoria dos números, os quais, para os gregos, eram inteiros e positivos. Uma vez que nem todas as grandezas podiam ser representadas por números inteiros, Euclides associava a cada número um segmento de reta e se referia a ele por AB. Não usava expressões do tipo “é múltiplo de ” ou “é fator de”. No lugar, empregava “é medido por” ou então “mede”. O livro VII apresenta vinte e duas definições de tipos de números: par e ímpar, primo e composto, plano e sólido (produto de dois inteiros ou de três inteiros). Seguem algumas dessas definições:

Definição 6. Um número par é aquele (que pode ser) dividido na metade.

Definição 7. E um número ímpar é aquele (que) não (pode ser) dividido na metade ou que difere de um número par por uma unidade.

Definição 12. Um número primo é aquele (que é) medido por uma unidade apenas.

Definição 13. Um número composto é aquele (que é) medido por algum número.

As duas primeiras proposições do livro VII apresentam aquilo que hoje é conhecido como o algoritmo de Euclides para encontrar o maior divisor comum (maior medida comum, na linguagem de Euclides) de dois números. O processo é uma aplicação repetida do Postulado de Eudoxo.

No livro IX, Euclides demonstra, dentre outros resultados, a infinitude dos números primos:

Proposição IX.20. *O (conjunto de) todos os números primos é mais numeroso que qualquer quantidade de números primos dada.*

3.2.5 Livros XI, XII e XIII

O livro XI contém 39 proposições sobre geometria espacial. O livro XII se ocupa da medida de figuras, usando o método de exaustão. Ele começa mostrando que polígonos similares inscritos em dois círculos têm suas áreas em razão igual ao quadrado dos diâmetros dos círculos, para em seguida mostrar, usando o método de Eudoxo, que as áreas dos dois círculos seguem a mesma proporção. O método é empregado ainda para o cálculo de volumes de pirâmides, cones, cilindros e esferas.

Por fim, o último dos livros é dedicado ao estudo de propriedades dos quatro sólidos regulares, ou *sólidos platônicos*: cubo, tetraedro, octaedro, icosaedro (12 faces) e dodecaedro (20 faces). Um poliedro é regular se suas faces são polígonos regulares congruentes e, em cada vértice, o mesmo número de faces se encontram. Os sólidos platônicos têm um lugar proeminente na filosofia de Platão, que associava os poliedros regulares aos elementos clássicos (terra, ar, água e fogo) e, portanto, à própria constituição do universo. Os sólidos platônicos já eram conhecidos dos pitagóricos, mas a prova de que existem apenas cinco poliedros regulares é devida a Theaetetus (c. 417-369 a.C.), matemático ateniense contemporâneo de Platão. Possivelmente, boa parte do livro XIII se deve a esse matemático.

3.3 Arquimedes de Siracusa

Figura 3.4: Imagem da Medalha Fields, exibindo na frente a imagem de Arquimedes e no verso a figura da esfera inscrita no cilindro, gravada em sua sepultura — *International Mathematical Union*.

Arquimedes (c. 287-212 a.C.) nasceu e viveu na cidade de Siracusa, na Sicília, mas possivelmente estudou em Alexandria e, ao longo de sua vida, manteve-se em comunicação com os estudiosos que lá trabalhavam. Sua obra foi representativa do espírito da ciência da Escola de Alexandria, conjugando o rigor matemático com preocupações em relação a aplicações. Foi um inventor com uma grande reputação em todo o mundo grego. Eram famosas suas máquinas de guerra, usadas para defender Siracusa de ataques de navios romanos. Há relatos de que um desses engenhos usava espelhos parabólicos para fazer convergir raios de sol e atear fogo aos navios inimigos.

Arquimedes foi um estudioso pioneiro da mecânica teórica. Antes dele, os textos sobre ciências físicas, tais como a *Física*, de Aristóteles, eram de natureza não matemática e especulativa. Em contraste, a obra *Sobre o Equilíbrio do Plano*, de Arquimedes, foi escrita de maneira formal e com estrutura similar aos *Elementos* de Euclides: partindo de definições e postulados simples, um corpo de resultados mais complexos é obtido. Seus famosos estudos sobre a lei de alavancas estão contidos nesta obra. Ao calcular o centro de gravidade de um segmento parabólico, utilizou o *princípio de exaustão*, que hoje é mais conhecido como sendo *de Arquimedes* do que *de Eudoxo*. Em sua obra chamada *Sobre Corpos Flutuantes*, também estruturada de forma matemática, postulados simples sobre pressão de fluidos permitem provar duas proposições que compõem o que hoje é conhecido como *princípio hidrostático de Arquimedes*. O trabalho de Arquimedes estabeleceu uma profunda relação entre matemática e mecânica, que influenciaria a evolução histórica tanto da física quanto da matemática.

Em seu tratado *Sobre a Medida do Círculo*, Arquimedes demonstrou suas habilidades computacionais ao avaliar a razão entre a circunferência e o diâmetro de um círculo. Começando com um hexágono regular inscrito e um hexágono circunscrito, dobrou progressivamente o número de lados até chegar a um polígono de 96 lados. Como resultado de seus cálculos, obteve uma aproximação para π da forma $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{10}{70}$, ou seja, $3,1408 < \pi < 3,1428$ (compare com o valor $\pi = 3,1415\ldots$).

Mereceram destaque no trabalho de Arquimedes problemas que hoje estão no domínio do cálculo diferencial e integral. Em seu tratado *Sobre Espirais*, definiu a espiral como o lugar dos pontos que se movem uniformemente em uma semirreta, enquanto a semirreta tem um movimento de rotação uniforme em torno de sua origem. Ou seja, trata-se da curva dada em coordenadas polares por $r = a\theta$, onde $a > 0$ é uma constante. Essa curva, hoje conhecida como *espiral de Arquimedes*, foi proposta como um método para a quadratura do círculo e para a trisseção do ângulo, sem evidentemente fazer uso da régua e do compasso. A espiral é uma curva definida de forma dinâmica, o que contrasta com o caráter estático da geometria grega tradicional. Também por um método dinâmico, Arquimedes encontrou tangentes: decompôs o movimento de um ponto da espiral em uma componente radial e em outra circular, usando em seguida um paralelogramo de velocidades para determinar a direção da velocidade do movimento e, assim, a direção da tangente. Realizou ainda vários cálculos envolvendo comprimentos e áreas, empregando técnicas do método de exaustão.

Dentre seus muitos tratados matemáticos, aquele do qual Arquimedes aparentemente mais se orgulhava era *Sobre a Esfera e o Cilindro*. Solicitou que sobre sua sepultura fosse gravado o desenho de uma esfera inscrita em um cilindro regular de altura igual ao diâmetro da esfera, em referência à demonstração de que a razão dos

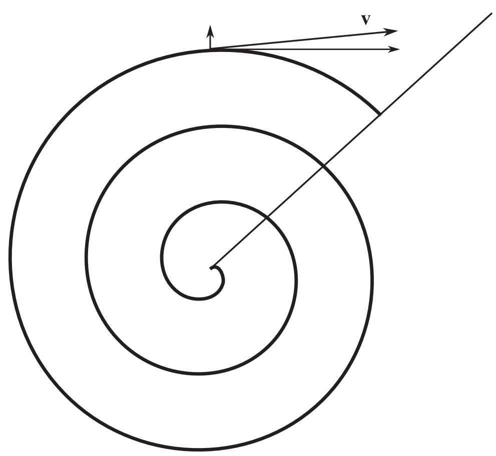


Figura 3.5: A espiral de Arquimedes, com a indicação da decomposição da velocidade em suas componentes radial e circular.

volumes do cilindro e da esfera nessa figura era a mesma razão de suas áreas, ou seja, $3/2$.

A fórmula para o volume da esfera aparece na obra *Sobre a Esfera e o Cilindro* no seguinte formato: qualquer esfera é igual a quatro vezes o cone que tem base igual ao maior círculo da esfera e altura igual ao raio da esfera. Já era conhecido — havia sido provado por Eudoxo — que o volume do cone era de $1/3$ do volume do cilindro correspondente, o qual nesse caso tem raio igual ao raio r da esfera e altura $h = r$. Ou seja:

$$V_{\text{cone}} = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^3.$$

Portanto

$$V_{\text{esfera}} = 4V_{\text{cone}} = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Esse resultado, provado pelo método exaustão usual, tem como corolário o resultado sobre a razão dos volumes do cilindro.

No início do século XX foi descoberto um dos mais importantes tratados de Arquimedes, sobre cuja existência não havia referências até então. Chamado de *O Método*, continha uma série de cartas escritas por Arquimedes ao matemático Erastótenes de Cirene (c. 275-194 a.C.), chefe da biblioteca de Alexandria. Nesta obra, Arquimedes esclareceu alguns aspectos do seu processo de criação matemática. Para ele, a existência de indicações sobre a validade de um resultado facilitaria a demonstração do mesmo. Essas indicações, Arquimedes obtinha por investigações "mecânicas" — pesos teóricos dos objetos matemáticos envolvidos — após as quais uma prova rigorosa deveria ser construída pelo método geométrico tradicional.

3.4 As cônicas de Apolônio

O matemático e astrônomo Apolônio (c. 262-190 a.C.) nasceu em Pérgamo, na Ásia Menor, mas foi vinculado à Escola de Alexandria, onde teria estudado e atuado como professor. Sua obra *Cônicas*, um livro sobre curvas cônicas de exposição puramente retórica, foi o único texto de sua autoria que chegou aos nossos dias, mas seu trabalho foi tão marcante que, em seu tempo, Apolônio, e não Euclides, era considerado o maior dos geômetras.

O estudo de seções cônicas remonta ao século IV a.C., quando Menecmo (c. 380-320 a.C.), aluno de Eudoxo, as obteve no estudo do problema de médias proporcionais duplas. Dizemos que x e y estão em média proporcional dupla em relação a dois segmentos de reta a e b se $a : x = x : y = y : b$, o que equivale ao conjunto de equações

$$x^2 = ay, \; y^2 = bx \text{ e } xy = ab.$$

As duas primeiras das equações são equações de parábolas e a terceira é a equação de uma hipérbole. No século anterior, Hipócrates de Quíos havia mostrado que a duplicação do cubo era equivalente ao problema de encontrar x e y em média proporcional dupla em relação a a e b, tais que $b = 2a$. De fato, nesse caso temos

$$y^3 = yy^2 = \frac{x^2}{a}bx = 2x^3.$$

A duplicação do cubo fica assim reduzida ao estudo da interseção de duas dessas cônicas.

Desde o tempo de Menecmo era conhecido que uma seção de um cone de base circular por um plano perpendicular a uma de suas geratrizes produzia curvas diferentes de acordo com o ângulo do vértice do cone: elipse, parábola ou hipérbole para ângulos agudo, reto ou obtuso, respectivamente. Apolônio obteve as três curvas interceptando um cone oblíquo de base circular por um plano secante variável: uma parábola, para um plano paralelo a uma das geratrizes; uma elipse, para um plano secante interceptando apenas uma das folhas do cone; e uma hipérbole, para um plano interceptando as duas folhas. Apolônio obteve propriedades características dessas três curvas que, em notação moderna, se traduzem nas equações:

- $y^2 = px$ (parábola);
- $y^2 = x(p - \frac{p}{a}x)$ (elipse);
- $y^2 = x(p + \frac{p}{a}x)$ (hipérbole),

onde a e p são parâmetros. Dessa caracterização provém a terminologia, parábola (= comparação), hipérbole (= excesso) e elipse (= deficiência).

Apolônio estudou ainda propriedades fundamentais das cônicas, tais como assíntotas, diâmetros conjugados e tangentes. Para Apolônio, uma tangente era uma “reta que toca a cônica e nenhuma outra reta pode estar entre ela e a cônica”. Essa noção de tangente, de caráter estático, contrasta com a ideia cinemática de Arquimedes. A definição de Apolônio, insatisfatória à luz da matemática moderna, também lhe parecia insatisfatória. Apolônio evitava o uso da reta tangente em sua definição de reta normal, que era feita do seguinte modo: a normal a uma curva C por um ponto p é a reta passando por p que maximiza ou minimiza a distância de p a C.

A obra de Apolônio foi marcante para o desenvolvimento da geometria. Em muitos aspectos, seu trabalho foi uma antecipação da geometria analítica de René Descartes, que viria a ser desenvolvida no século XVII. Diferentemente da geometria analítica, onde um sistema de coordenadas é fixado, nas *Cônicas*, o sistema de coordenadas era definido *a posteriori* através do uso de retas de referência. Além do mais, na geometria de Apolônio uma curva definia uma equação, enquanto na geometria analítica são as equações que definem curvas. A geometria da Grécia antiga trabalhava com poucos exemplos de curvas, todas elas geradas a partir de círculos e retas. Além disso, a inexistência de uma teoria algébrica desenvolvida impediu maiores avanços da teoria de Apolônio na direção de uma teoria nos moldes da geometria analítica.

Séculos mais tarde, a obra de Apolônio teria importantes aplicações nos estudos de astronomia de Kepler e na teoria mecânica de Newton. Trata-se de um exemplo notável de como uma teoria matemática produzida a partir de motivações puramente filosóficas e estéticas pode se revelar fundamental para o avanço global da ciência e da técnica.

3.5 Ptolemeu de Alexandria

O astrônomo, geógrafo e matemático Cláudio Ptolemeu (c. 90-168 d.C.) — que não tinha relação familiar com os reis da dinastia ptolemaica — escreveu um tratado astronômico e matemático sobre o movimento estelar e planetário que celebraria o modelo geocêntrico do universo e seria um dos textos científicos de maior influência de todos os tempos. Com o título de *Síntese Matemática* e composto por 13 livros, seu tratado ficou conhecido por *Almagesto* — o maior, a partir do termo usado pelos árabes para destacá-lo de outros tratados de astronomia. Em seu *Almagesto*, Ptolemeu deu a contribuição mais significativa para a trigonometria na Antiguidade.

A ideia da esfericidade do céu e a descoberta da forma esférica da Terra motivaram a criação de ferramentas para lidar com a geometria do círculo e da esfera. Hiparco de Niceia (c. 180-125 a.C.) construiu uma tabela de cordas do círculo e, no século I d.C, Menelau de Alexandria criou a chamada trigonometria esférica e estudou sistematicamente as propriedades de triângulos esféricos. Ptolemeu estendeu os trabalhos de Hiparco e de Menelau, criando um procedimento para o cálculo de cordas subentendidas por arcos de um círculo.

A divisão de um círculo em 360 graus, que já era usada na Grécia e cujo uso provavelmente vem da astronomia, foi celebrizada por Ptolemeu. Para fazer uso do sistema babilônico de frações sexagesimais, Ptolemeu dividiu cada grau em 60 *partes minutae primae* (primeiras pequenas partes) e cada uma dessas subdivisões em 60 *partes minutae secundae* (segundas pequenas partes), de onde vem os nomes "minutos" e "segundos". Em seus cálculos, Ptolemeu usava como aproximação de π o valor de $3;8.30$, aqui escrito no sistema sexagesimal. No sistema decimal, isso equivale a $\pi \approx 3,1416$.

Em seu *Almagesto*, Ptolemeu construiu uma tabela de cordas de arcos, com os ângulos variando de $\frac{1}{2}^{\text{o}}$ a 180º em intervalos de $\frac{1}{2}^{\text{o}}$. Sua tabela de cordas seria referência para os astrônomos por mais de mil anos. A construção de Ptolemeu equivalia a construir uma tabela de senos de $\frac{1}{4}^{\text{o}}$ a 90º e, uma vez que $\cos\theta = \text{sen}(90^{\text{o}} - \theta)$, indiretamente também fornecia uma tabela de cossenos.

Para um ângulo θ, Ptolemeu calculava o comprimento da corda subentendida por esse ângulo, em um círculo de diâmetro igual a 120 unidades. No cálculo do seno, a trigonometria moderna calcula a razão entre a metade dessa corda e o raio do círculo. Assim, se denotamos o comprimento da corda subentendida por $\hat{a}$ por crd(â) (veja Figura 3.6), temos

$$\text{sen}(\hat{a}/2) = \frac{\text{crd}(\hat{a})/2}{60} = \frac{\text{crd}(\hat{a})}{120},$$

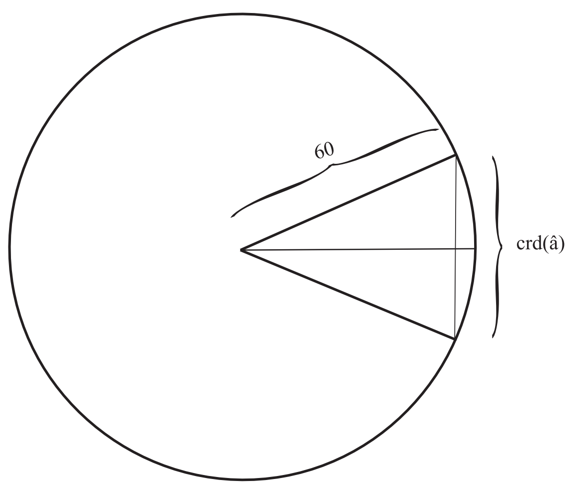


Figura 3.6: Cálculo de $\text{sen}(\hat{a}/2)$ a partir da corda subentendida pelo ângulo $\hat{a}$.

3.6 A aritmética de Diofanto

Diofanto de Alexandria foi o último grande matemático da Escola de Alexandria. Viveu no século III d.C., mas seu período de vida preciso não é conhecido, assim como muito pouco é sabido sobre sua vida. Sua grande obra, intitulada *Aritmética*, era composta de 13 livros, sendo que desses apenas seis chegaram aos nossos dias, através de manuscritos gregos de origem bizantina, e se tornaram conhecidos desde o Renascimento. Possivelmente, a *Aritmética*, assim como os *Elementos* de Euclides, foi uma compilação e sistematização dos conhecimentos da época. A obra é composta por problemas de aritmética, com enunciados abstratos e gerais, sendo os dados numérico especificados apenas *a posteriori*. Na solução desses problemas, Diofanto se libertou das referências geométricas, o que faz seu método diferir substancialmente dos usados na álgebra geométrica grega tradicional.

Diofanto estudou as chamadas "equações indeterminadas", ou seja, equações ou sistemas de equações com várias variáveis, que admitiam em geral muitas soluções. Os coeficientes de suas equações, assim como suas soluções, eram sempre números racionais positivos, quase sempre inteiros. Trabalhando com exemplos numéricos específicos, buscou soluções particulares, não demonstrando preocupação ou interesse na obtenção de soluções gerais. Os artifícios de cálculo por ele empregados indicavam um profundo conhecimento das propriedades dos números. Diofanto é muitas vezes considerado o "pai da álgebra", mas talvez seja muito mais adequado tratá-lo como precursor da moderna teoria de números, cujo ponto de partida seria o trabalho de Fermat no século XVII.

Uma outra contribuição fundamental da *Aritmética* de Diofanto diz respeito à notação empregada. Esta abandonou o estágio puramente retórico e incorporou símbolos, notações e abreviações. No entanto, estes elementos não eram ainda objeto de manipulação algébrica. A notação de Diofanto foi um primeiro passo na direção da álgebra simbólica, que seria desenvolvida apenas a partir do Renascimento europeu e atingiria sua maturidade com a obra de René Descartes no século XVII.

Em Diofanto, a variável x era chamada de número e denotada por S. A notação para as potências da variável x, descrita no quadro a seguir, guardava implícito o princípio da adição dos expoentes:

x^2	Δ^{Υ}
x^3	K^{Υ}
x^4	$\Delta^{\Upsilon}\Delta$
x^5	ΔK^{Υ}
x^6	$K^{\Upsilon}K$

Diofanto denotava a adição pela simples justaposição, enquanto a subtração era representada pelo símbolo $\pitchfork$. O coeficiente independente era denotado por $\overset{o}{M}$. O sistema de numeração empregado era o iônico ou alfabético. Essa notação permite escrever polinômios em uma variável de maneira tão concisa quanto a atual. Assim, o polinômio

$$x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5$$

assumiria a seguinte forma na notação diofantina:

$$\Delta^{\Upsilon}\Delta\overline{\alpha}K^{\Upsilon}\overline{\beta}\Delta^{\Upsilon}\overline{\gamma}S\overline{\delta}\overset{o}{M}\,\overline{\epsilon}$$

3.7 Epílogo

O ano 30 a.C. marcou o fim da dinastia ptolemaica e o início do domínio romano no Egito. O Museu de Alexandria sobreviveu, porém perdeu seu vigor sem o apoio de seus antigos patronos. Cláudio Ptolemeu e Diofanto de Alexandria atuaram já nessa fase. Depois deles, merece menção o nome Pappus de Alexandria que, por volta do ano 320 d.C., escreveria o último tratado matemático significativo da Antiguidade Clássica, chamado de *Coleção*.

Em todos os domínios do Império Romano, a ascensão do cristianismo minaria o ambiente para a produção científica. Em 391 d.C., seguindo um decreto do imperador romano Teodósio I que bania o paganismo, a Biblioteca e o Museu de Alexandria, considerados templos pagãos, foram fechados. Acusadas de ensinarem uma filosofia pagã que ameaçava o cristianismo, as escolas filosóficas de Atenas também seriam fechadas em 529 d.C. por ordem de Justiniano, imperador romano do Oriente. Alguns de seus filósofos se exilaram na Pérsia. Esse fato, que é um marco para o fim da era de desenvolvimento da matemática grega, significaria também uma transmigração para o Oriente dos polos de criação científica.

3.8 Exercícios

1. Transcreva para a linguagem matemática moderna as Definições 8, 10, 15 e 17 do livro I dos *Elementos* de Euclides.

2. Transcreva para a linguagem matemática moderna os Postulados de 1 a 5 do livro I dos *Elementos* de Euclides.

3. Escreva o enunciado e a demonstração da Proposição 1 dos *Elementos* de Euclides em linguagem moderna. Faça um desenho.

4. Critique a definição de reta tangente de Apolônio. Compare com a definição de Arquimedes para a reta tangente à espiral e ainda com a definição moderna.

5. Sabendo que $\mathrm{sen}(60^o) = \sqrt{3}/2$, calcule, em frações sexagesimais e com a aproximação de duas casas sexagesimais, o comprimento da corda subentendida pelo ângulo de 120º no círculo ptolemaico (lembre-se que ele tem um diâmetro de 120 unidades).

6. Escreva, na notação de Diofanto, o polinômio $5x^4 + 6x^3 + 7x^2 + x + 9$.

4 O período medieval

AULA 4: O PERÍODO MEDIEVAL

OBJETIVOS
Ao terminar a leitura desse capítulo, o leitor deverá ser capaz de:
1. Entender a contribuição dos árabes à matemática, sobretudo no que diz respeito à criação da álgebra.
2. Entender como o estudo da matemática foi retomado na Europa no período medieval.
3. Entender como o sistema de algarismos indo-arábicos chegou à Europa.

4.1 A matemática hindu

Após o período clássico, os polos de criação matemática se deslocaram na direção do Oriente. A matemática ganhou contribuições vindas da Índia e, sobretudo, do Império Árabe, que deixaram consequências importantes em sua estrutura. Nessa seção analisaremos alguns aspectos da matemática indiana.

A contribuição mais marcante da Índia para a matemática foi seu sistema de numeração, decimal e posicional, com o uso de nove símbolos e do zero. Na órbita do Ocidente, a referência mais antiga ao sistema de numeração hindu foi feita em um texto de 662 d.C. do bispo sírio Severus Sebokt, em que, lamentando o desprezo demonstrado em seu tempo pelo conhecimento produzido fora do mundo grego, relatava os "valiosos métodos de cálculo" dos hindus e seu sistema numérico composto por nove símbolos.

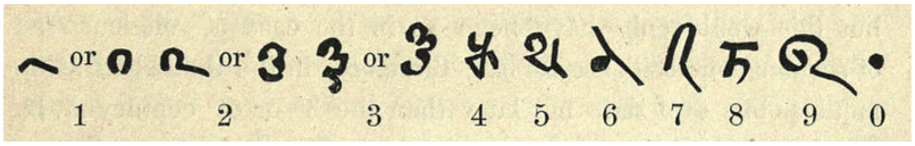


Figura 4.1: Desenhos dos numerais presentes no manuscrito Bakhshali, texto matemático hindu produzido entre o séc. II a.C. e o séc. III d.C. — Fonte: *On The Bakhshali manuscript*, Augustus Hoernle.

O sistema de numeração hindu foi resultado da incorporação de elementos de outros povos e de uma longa evolução interna. Os hindus uniram em seu sistema quatro elementos: a base decimal, a notação posicional, o uso do zero e uma notação para cada um dos dez numerais. Nenhum desses elementos foi criação hindu, mas foi na Índia que eles ganharam uma existência conjunta. A princípio, o sistema contava apenas com nove símbolos básicos. O zero, como instrumento para preencher as posições vazias, surgiu apenas posteriormente — a primeira referência a ele data do século IX. Nessa época, o desenho dos dez numerais diferia bastante do formato moderno. Em seu caminho para o Ocidente, sua grafia passou por transformações nas mãos dos árabes antes de ganhar a forma atual.

Os primeiros registros sobre a matemática indiana, datando do século II da era cristã, estão nos *Sulvasutras*, livros religiosos sobre o uso de cordas em medidas de altares. Essa técnica já era usada pelo menos desde o século VII a.C. e possivelmente teve origem no Egito. Nos *Sulvasutras* o sistema de numeração na base dez já era empregado.

Nos séculos IV e V d.C., os astrônomos e matemáticos indianos produziram os *Siddhantas*, ou sistemas de astronomia, textos que receberam forte influência dos astrônomos de Alexandria. Por exemplo, em um desses textos foi usada a aproximação $\pi \approx 3\frac{177}{1250} = 3,1416$, essencialmente a mesma usada por Ptolemeu em seu *Almagesto*. Nos *Siddhantas*, a correspondência ptolemaica entre arco e corda da circunferência foi transformada: passou-se a associar metade da corda à metade do arco. Nasceu, assim, a função seno moderna.

Em 499 d.C., o matemático e astrônomo Aryabhata publicou o *Aryabhatiya*, obra classificada como um *Siddhanta*. Seu texto, em verso, descreveu regras de cálculo em astronomia e de medidas em matemática, sem fazer uso de métodos dedutivos. A regra de três foi descrita da seguinte maneira:

Na regra de três multiplique o fruto pelo desejo e divida pela medida. O resultado será o fruto do desejo.

O verso se refere à proporção $a : b = c : x$, onde a é a "medida", b é o "fruto", c é o "desejo" e x é o "fruto do desejo", resolvida fazendo $x = bc/a$. Em sua segunda metade, o *Aryabhatiya* é devotado ao cálculo do tempo e da trigonometria esférica. A obra fornece tabelas de senos e procedimentos para seu cálculo.

No século VII d.C., o matemático e astrônomo Brahmagupta (c. 598-668) deu importantes contribuições conceituais que seriam essenciais para o desenvolvimento da álgebra. Ao buscar soluções para equações quadráticas, ampliou o espectro das possíveis soluções ao incluir soluções negativas. Estabeleceu regras numéricas para lidar com números negativos que, pela primeira vez, tiveram sua aritmética sistematizada:

Positivo dividido por positivo, ou negativo dividido por negativo é positivo. [...] Positivo dividido por negativo é negativo. Negativo dividido por afirmativo é negativo.

Ao contrário dos gregos, os matemáticos hindus consideravam raízes irracionais de números como sendo números. Essa concepção era motivada pela inexistência, na matemática hindu, de distinção entre valores exatos e aproximados. Uma outra contribuição hindu foi a incorporação do zero à aritmética, avançando em relação à ideia grega do "nada", nunca interpretada como um número.

Por fim, merece ser citado o nome de Bhaskara (1114-1185), o matemático indiano mais significativo do período medieval, com um vasto trabalho na solução de equações indeterminadas lineares e quadráticas, além de contribuições em diversas outras áreas da matemática.

4.2 A matemática árabe

4.2.1 Introdução

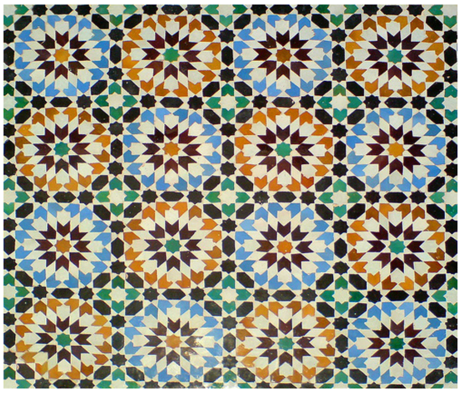


Figura 4.2: Exemplo de arte islâmica: mosaico da Madraça Ben Youssef em Marraquech, Marrocos. c. 1565.

No século VII da era cristã, surgiu na península arábica a religião islâmica ou muçulmana, religião monoteísta baseada nos ensinamentos do profeta Maomé (c. 570-632 d.C.) e no texto sagrado do Alcorão. Ao unificar tribos nômades na Península Arábica, Maomé fundou também um Estado baseado na fé islâmica que, sob a liderança de seus sucessores, os califas, expandiu seus domínios em territórios que se estendiam da Índia à Península Ibérica, passando pelo Oriente Médio e norte da África. Esse vasto império teve inicialmente como capital a cidade de Damasco, na Síria, mas posteriormente foi desmembrado em dois reinos independentes, no Oriente e no Ocidente. A civilização árabe viveu seu período áureo entre os séculos VII e XIII, entrando em decadência com as Cruzadas (séculos XI a XIII), em sua porção ocidental, e com as conquistas mongóis (século XIII), na porção oriental. Dois eventos marcaram o declínio árabe: a conquista de Córdoba (Espanha), capital do ocidente muçulmano, por Fernando III de Castela em 1236, e a destruição de Bagdá, capital do oriente muçulmano, pelos mongóis em 1258.

Nos países conquistados, os árabes encontraram civilizações em estágio bastante superior à sua e souberam assimilar as culturas e padrões intelectuais locais. Superado um estágio inicial de fanatismo religioso, souberam desenvolver um espírito de tolerância e, integrando-se às sociedades locais, construíram uma civilização e cultura próprias. Nas cidades árabes, havia liberdade de culto para as religiões cristã e judaica, religiões monoteístas assim como a muçulmana. No mundo árabe, a ciência passou a ocupar um lugar de destaque e suas cidades se transformaram em importantes centros de saber científico. Academias, observatórios e bibliotecas foram fundados, recebendo estímulo e proteção de mecenas locais e do próprio califa. Os árabes desenvolveram uma preocupação pela observação, descrição e medição rigorosas, o que propiciou o desenvolvimento de diversos ramos da ciência, entre os quais a astronomia, a medicina, a química, a botânica, a zoologia e a matemática.

Consideramos ciência árabe tudo aquilo que foi desenvolvido no período e no espaço geográfico relatados acima e, em grande parte, registrado na língua árabe. Os árabes se fizeram depositários do saber clássico. Obras da Antiguidade, originalmente escritas em grego e latim, foram traduzidas para seu idioma. Muitas dessas obras — literárias, filosóficas e científicas — sobreviveram e puderam chegar à era moderna através de suas traduções árabes. Os alicerces da matemática árabe foram herdados da Grécia clássica, mas também do Oriente — em particular da Índia, região com a qual havia um intenso intercâmbio. A contribuição árabe para a matemática, no entanto, foi além da assimilação e da preservação do conhecimento herdado de civilizações mais antigas. Os árabes conjugaram o rigor grego às visões práticas babilônica e hindu para, a partir daí, introduzir elementos originais que deram uma nova vida à matemática.

Aspectos de natureza religiosa estiveram na raiz da incursão árabe no mundo da ciência. Os primeiros pensadores islâmicos, em contraste com os cristãos europeus medievais, enxergaram o conhecimento como uma forma de se aproximar de Deus. Há versículos no Alcorão, livro sagrado islâmico, que se referem à capacidade humana de explorar a ordem divina do universo: "Ele foi Quem fez do Sol uma luz e da lua uma claridade, e deu-lhe fases para que saibais o número dos anos e a as estações. [...] Ele detalha as revelações aos sensatos" (10,5). De fato, a maior parte do Alcorão convida os fiéis a pensar e a buscar Deus através de suas criações, dentre elas o céu e a Terra. O preceito islâmico das cinco orações diárias voltadas para a cidade sagrada de Meca em horários definidos impuseram desafios à medição do tempo e à orientação geográfica, que resultaram em estímulos para o avanço da astronomia e da matemática.

Um elemento, material, esteve no cerne da revolução cultural árabe: o papel. Os europeus, no período medieval, usavam como suporte para a escrita e produção de livros o pergaminho — pele animal, geralmente de caprino ou ovino, tratada e polida. Esse material foi desenvolvido no século II a.C. na cidade de Pérgamo — de onde vem o seu nome — para atender às necessidades de sua biblioteca diante do alto custo e da escassez do papiro. No século VIII, os árabes passaram a dominar a tecnologia chinesa de fabricação do papel, supostamente adquirida de prisioneiros de guerra chineses. Em comparação com o pergaminho, o papel era um suporte barato e leve, fácil de transportar e suficientemente resistente. Seu uso se disseminou e, em poucas décadas, moinhos de produção de papel se estabeleceram em várias cidades árabes. O papel propiciou a formação e a disseminação de uma cultura da escrita e do livro nas cidades árabes, que passaram a contar com mercados de livros e grandes bibliotecas.

4.2.2 A Casa da Sabedoria e al-Khwarizmi

A cidade de Bagdá foi construída pelo califa Abu Jafar al-Mansur (714-775) para substituir Damasco como capital da porção oriental do Império Árabe. Al-Mansur era um homem interessado em filosofia e ciência e procurou criar condições em sua nova cidade para o estudo e a produção científica. Fundou uma biblioteca em seu palácio, que inicialmente se ocupou de traduções para o árabe de textos persas, hindus e gregos. Essa biblioteca ficaria conhecida como Casa da Sabedoria (*Bait al-Hikma*) e, mais tarde, evoluiria para uma instituição de ensino e pesquisa, destacando-se como um dos mais importantes centros de produção científica no período compreendido entre os séculos IX e XIII.

Um dos mais notáveis estudiosos vinculados a essa academia foi o matemático e astrônomo Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi (c. 780-850). Duas de suas obras exerceram uma influência decisiva nos rumos tomados pela matemática. A primeira delas é o tratado de aritmética intitulado *Livro da Adição e da Subtração segundo o Cálculo dos Indianos*. Em seu texto são discutidos o sistema de numeração decimal posicional hindu e as operações feitas nesse sistema, incluindo a multiplicação e a divisão. Séculos mais tarde, as traduções latinas desse livro criariam na Europa a impressão de que o sistema de numeração nele descrito eram uma criação de seu autor. Os numerais indo-arábicos ficaram então conhecidos com sendo de al-Khwarizmi, o que resultou nas palavras algarismo e algoritmo, incorporadas às línguas europeias modernas.

Uma segunda obra fundametal de al-Khwarizmi foi o *Tratado sobre o Cálculo da al-Jabr e al-Muqabalah*. Esse livro é considerado o fundador da álgebra como área do conhecimento matemático, sendo a palavra álgebra uma evolução do termo *al-jabr*. Nessa obra, al-Khwarizmi discorreu sobre soluções de equações de primeiro e segundo graus, tratadas de forma puramente retórica, sem o emprego de símbolos. Uma amostra da álgebra retórica de al-Khwarizmi está no quadro seguinte:

- "Um quadrado é igual a cinco raízes. A raiz do quadrado então é 5, e 25 forma o seu quadrado que, é claro, é igual a 5 de suas raízes." O texto apresenta a equação $x^2 = 5x$, sua raiz $x = 5$ e afirma que $x^2 = 25$.
- "Um quadrado e dez raízes são iguais a 39 unidades." A frase faz referência à equação $x^2 + 10x = 39$.

Al-Khwarizmi reduziu as equações de segundo grau a seis tipos canônicos:

- $ax^2 = bx$ (quadrado igual a uma raiz);
- $ax^2 = c$ (quadrado igual a um número);
- $bx = c$ (raiz igual a um número);
- $ax^2 + bx = c$ (quadrado e raiz igual a um número);
- $ax^2 + c = bx$ (quadrado e número igual a uma raiz);
- $bx + c = ax^2$ (raiz e número igual a um quadrado).

A classificação nessas categorias se fazia necessária pois não se admitiam equações com coeficientes negativos. Para cada um desses tipos, o método de solução foi apresentado através de exemplos. Nesses cálculos, duas operações básicas foram usadas:

- *al-jabr* (complemento ou restauração), que consistia em transpor os termos subtraídos para o outro lado da equação.

- *al-muqabalah* (redução ou balanceamento), que consistia no cancelamento de termos iguais dos dois lados da equação.

A equação quadrática

$$x^2 + 15 - 3x = 10$$

é transformada em

$$x^2 + 15 = 3x + 10,$$

por *al-jabr*, sendo, em seguida, reduzida a

$$x^2 + 5 = 3x,$$

por *al-muqabalah*.

4.2.3 Abu-Kamil

A obra de al-Kwarizmi teve sequência com o trabalho de Abu-Kamil (c. 850-930), matemático de origem egípcia que publicou, na transição do século IX para o século X, um tratado de grande repercussão sobre *al-jabr* e *al-muqabalah*. A *al-jabr* de al-Kwarizmi era mais elementar e voltada para um público amplo, enquanto o trabalho de Abu-Kamil foi concebido para leitores familiarizados com os *Elementos* de Euclides. O cálculo algébrico de Abu-Kamil atingiu um nível elevado de abstração. Utilizou uma série de identidades algébricas, como, por exemplo,

$$\sqrt{a} \pm \sqrt{b} = \sqrt{a + b \pm 2\sqrt{ab}}.$$

Além disso, Abu-Kamil trabalhou com quantidades irracionais, tanto como coeficientes de equações quanto como soluções, o que era evitado por al-Kwarizmi. Abu-Kamil estudou equações algébricas de grau superior a dois e sistemas de equações não lineares em três variáveis. Assim como em al-Kwarizmi, a *al-jabr* de Abu-Kamil era retórica. Por exemplo, uma expressão da forma “quadrado-quadrado-coisa” era usada para representar $x^5 = x^2x^2x$.

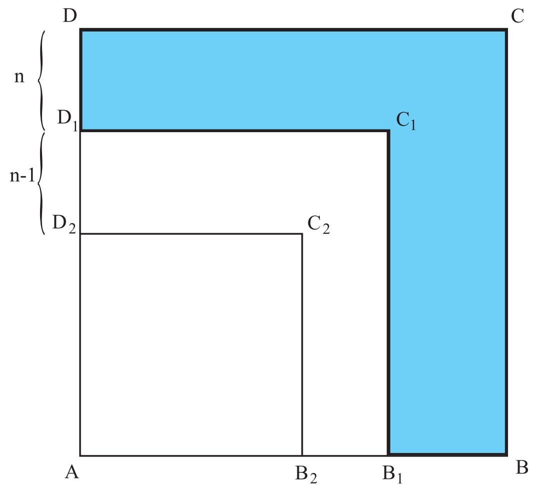
4.2.4 Al-Karagi

A trajetória de desenvolvimento da álgebra prosseguiu com al-Karagi (c. 953-1029), matemático de origem persa que viveu e trabalhou em Bagdá. Atuando na fronteira entre álgebra e aritmética, al-Karagi teve o mérito de tornar o cálculo algébrico independente da geometria. Foi o primeiro algebrista a perceber que as potências da forma $x, x^2, x^3, \ldots$, assim como os recíprocos $1/x, 1/x^2, 1/x^3, \ldots$, poderiam ser definidos para expoentes arbitrariamente altos, sem a necessidade de se fazer referência a medidas de objetos, como acontecia na álgebra geométrica grega. Trabalhou com a álgebra de polinômios e produziu regras para somar, subtrair, multiplicar polinômios e dividir polinômios por monômios.

Al-Karagi forneceu a seguinte demonstração geométrica para a identidade

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2.$$

Construiu, inicialmente, um quadrado $ABCD$ de lado $1 + 2 + \cdots + n$.



A área do polígono $\Delta_1 = DD_1C_1B_1BC$, obtida pela diferença entre os quadrados $ABCD$ e $AB_1C_1D_1$, vale

$$2n(1 + 2 + \cdots + n) - n^2 = 2n\frac{n(n+1)}{2} - n^2 = n^3.$$

De forma análoga, a área do polígono $\Delta_2 = D_1D_2C_2B_2B_1C_1$ é igual a $(n-1)^3$. Prosseguindo dessa forma, o quadrado é decomposto na união dos polígonos $\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_{n-1}$ e do quadrado de lado 1. Igualando as áreas, obtém-se

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2.$$

Al-Karagi calculou os coeficientes de $(a+b)^n$ até $n = 12$ e ainda indicou que tais coeficientes poderiam ser calculados para todo n seguindo a regra

$$\binom{m}{n} = \binom{m-1}{n-1} + \binom{m}{n-1},$$

o que hoje é conhecido como *triângulo de Pascal*. Tanto no caso dos coeficientes da expansão binomial, quanto na identidade aritmética do exemplo anterior, estão presentes argumentos que guardam os elementos básicos do moderno método de demonstração por indução.

4.2.5 Al-Samaw'al

O principal sucessor de al-Karagi foi al-Samaw'al (c. 1130-1180), médico e matemático de origem judia que viveu em Bagdá. Sua obra principal se chamava *al-Bahir* ou *Livro Luminoso da Aritmética*. Al-Samaw'al estabeleceu regras algébricas para lidar com expressões negativas, tais como

$$-(-ax^n) = ax^n \quad \text{e} \quad -ax^n - (bx^n) = -(a+b)x^n.$$

Al-Samaw'al também generalizou o conceito de potência algébrica e enunciou a regra do produto $x^n x^m = x^{m+n}$ para m e n inteiros. Para tal, fez uso de um quadro da forma

$\cdots$	2	1	0	1	2	$\cdots$
$\cdots$	x^2	x	1	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x^2}$	$\cdots$

Neste diagrama, efetua-se a multiplicação de x^m por x^n movendo-se, a partir da posição correspondente a x^m, n posições para a esquerda, se n é positivo, ou para a direita, se n é negativo. Esse instrumento visual para realizar as operações significou um avanço em termos de eficiência em relação à álgebra retórica e foi um importante passo para o desenvolvimento do simbolismo algébrico. Al-Samaw'al utilizou seu quadro para produzir um algoritmo para divisão de polinômios. Na verdade, ele considerou polinômios em x e em $1/x$, ou seja, expressões do tipo $\sum_{k=-m}^{n} a_k x^k$, e operou com essas expressões como se fossem séries de potências. No caso de polinômios estritos, al-Samaw'al obteve um método de divisão com resto análogo ao algoritmo de divisão de Euclides para inteiros positivos.

4.2.6 Alhazen

Ibn al-Haytham (965-1040), também conhecido por Alhazen, foi um matemático, astrônomo e médico nascido em Basra, atual Iraque, que viveu e trabalhou na cidade do Cairo. Seus trabalhos sobre óptica, reflexão, refração e sobre a natureza da visão foram marcantes, influenciando o subsequente desenvolvimento da área. Realizou experimentos com lentes e espelhos, reflexão e refração. Sua ênfase na experimentação controlada e rigorosa faz com que seja visto como um dos precursores do método científico moderno.

Seu livro mais importante foi o *Tratado de Óptica*, texto inspirado nos trabalhos de Ptolemeu sobre refração e reflexão. Composto de sete volumes, essa obra exerceu grande influência na ciência ocidental. Em seu livro V está presente o que é hoje conhecido como *problema de Alhazen*: "dada uma fonte de luz e um espelho esférico, encontre o ponto do espelho onde a luz será refletida para os olhos de um observador". A solução desse problema produz uma equação de grau quatro, resolvida por Alhazen tomando a interseção de uma circunferência com uma hipérbole. Nesse trabalho Alhazen obteve uma fórmula para a soma de potências de ordem quatro, a qual ele aplicou para encontrar o volume do sólido formado pela revolução de um arco de uma parábola em torno da reta tangente ao seu vértice. Foi, assim, o primeiro matemático a calcular o que hoje denotamos por $\int_0^a x^4 dx$.

4.2.7 Omar Khayyam

Nas obras dos primeiros algebristas, al-Kwarizmi e Abu Kamil, e nos trabalhos de al-Karagi, foram estudadas apenas equações algébricas de grau dois ou equações de grau superior que pudessem ser reduzidas a esse grau. A partir do século X, ressurgiu o interesse por uma série de problemas geométricos clássicos, tais como a duplicação do cubo, a trisseção do ângulo e a construção de certos polígonos regulares inscritos no círculo. A solução desses problemas recai em equações de grau três e, por isso, como viria a ser conhecido no século XIX, não poderiam ser resolvidos com régua e compasso. Concomitantemente, o estudo da astronomia e da óptica trouxe à tona vários problemas envolvendo equações de grau três ou maior.

Omar Khayyam (1048-1131), matemático, astrônomo, filósofo e poeta persa, produziu um grande tratado denominado *Demonstração de Problemas de al-Jabr e al-Muqabalah*, escrito em torno de 1070. Nesse trabalho, Omar Khayyam classificou as equações cúbicas e propôs construções geométricas de suas raízes. As equações, apesar de estudadas com coeficientes quaisquer, eram expressas de uma maneira completamente retórica.

A equação cúbica

$$x^3 + p^2x = p^2q$$

é resolvida com auxílio das equações

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = qx \\ x^2 = py \end{cases}$$

A primeira é a equação de um círculo e a segunda, a equação de uma parábola. Desse modo, uma solução para a equação cúbica é a abcissa do ponto de interseção de um círculo com uma parábola.

A álgebra de Omar Khayyam tinha um caráter geométrico, contrastando com o aspecto aritmético daquela praticada por al-Karagi e por al-Samaw'al. Por isso, respeitava o princípio de homogeneidade das dimensões. Por exemplo, a equação $x^3 + ax = b$ era tratada no formato $x^3 + p^2x = p^2q$. Omar Khayyam classificou as equações cúbicas em quatorze tipos canônicos e, para cada um desses tipos, identificou o par de curvas de grau dois usado na solução. Alguns aspectos ligados ao método geométrico de solução de equações cúbicas de Omar Khayyam, tais como a existência de interseção, continuidade, convexidade e propriedades assintóticas, seriam abordados por seu sucessor al-Tusi (1201-1274), matemático e astrônomo persa, que desenvolveu métodos de natureza numérica para a extração de raízes n-ésimas de um número (ou seja, a solução da equação $x^n = a$) e para a obtenção de raízes de certas equações cúbicas.

4.2.8 Al-Kashi

Al-Kashi (c. 1380-1429) foi um matemático e astrônomo de origem persa que trabalhou em Samarcanda (atual Uzbequistão). Sua obra mais importante se chamava *Chave da Aritmética*, uma verdadeira enciclopédia matemática que reuniu todos os avanços em álgebra e aritmética de seus predecessores árabes e se tornou livro de referência para os estudiosos nos séculos seguintes. O autor obteve, em seu *Tratado da Circunferência*, uma aproximação de 2π com 16 casas decimais exatas, usando um método de aproximações numéricas baseado no método de Arquimedes de aproximação do círculos por polígonos regulares inscritos. No seu *Tratado da Corda e do Seno*, obteve aquilo que é considerado o primeiro método de solução de equações por meio de aproximações numéricas sucessivas, descrito no quadro a seguir:

A equação cúbica

$$x^3 + q = px$$

é estudada com o objetivo de calcular $\operatorname{sen} 3^{\circ}$ a partir de $\operatorname{sen} 1^{\circ}$, usando a relação $\operatorname{sen} 3\theta = 3\operatorname{sen}\theta - 4\operatorname{sen}^3\theta$. A equação cúbica equivale a

$$x = \frac{q + x^3}{p}.$$

Toma-se, por primeira aproximação da raiz, $x_1 = p/q$. Por segunda aproximação, toma-se $x_2 = \frac{q+x_1^3}{p}$. Sucessivamente, tem-se a fórmula recursiva

$$x_n = \frac{q + x_{n-1}^3}{p}$$

para a obtenção de aproximação da raiz na n-ésima etapa. Pode-se então demonstrar que a sequência obtida converge rapidamente para uma raiz da equação.

Figura 4.3: O quadrilátero de Saccheri.

4.2.9 O postulado das paralelas

Apesar de a matemática islâmica ter se notabilizado mais pela álgebra, um problema geométrico clássico mereceu a atenção dos árabes: a prova do quinto postulado de Euclides. Entre os gregos, esse problema já era conhecido como "o quarto problema famoso da geometria".

Alhazen propôs a construção de um quadrilátero com três ângulos retos e achou ser possível provar que o quarto ângulo também deveria ser reto. Dessa construção, o quinto postulado seguiria como corolário. Alhazen assumiu que o lugar dos pontos equidistantes a uma dada reta deveria ser paralelo à reta dada, fato que é equivalente ao postulado de Euclides.

Uma segunda tentativa foi feita por Omar Khayyam, que partiu de um quadrilátero possuindo dois lados opostos iguais e perpendiculares à base — esse quadrilátero ficaria conhecido como *quadrilátero de Saccheri*, em reconhecimento aos estudos sobre o postulado das paralelas no século XVIII. Omar Khayyam sabia que os dois ângulos superiores do quadrilátero eram iguais e concluiu que ambos deveriam ser retos. No entanto, partiu de pressupostos equivalentes ao postulado de Euclides.

Al-Tusi foi o terceiro matemático islâmico que se envolveu com o problema das paralelas. A prova de al-Tusi dependia da seguinte hipótese:

se uma reta u é perpendicular a uma reta w no ponto A e se uma reta v é oblíqua a w no ponto B, então as perpendiculares traçadas a partir de pontos de u à reta v são menores que AB no lado em que v faz um ângulo agudo com w e maiores que AB no lado em que v faz um ângulo obtuso com w.

A hipótese se al-Tusi também era equivalente ao postulado das paralelas.

4.3 A Europa na Idade Média

4.3.1 Introdução

Os textos de história classificam como Idade Média o período que se iniciou com a queda de Roma em 476 d.C., marcada pela deposição do último imperador do Império Romano do Ocidente, Rômulo Augusto, e que terminou em 1453, com a conquista de Constantinopla (atual Istambul) pelos otomanos, significando o fim do Império Bizantino. Esse período é caracterizado de forma simplista como "idade das trevas", algo sem dúvida motivado por uma visão eurocêntrica da história. A matemática, assim como a atividade científica em geral, esteve em plena atividade no mundo árabe, com importantes avanços em relação à herança clássica, fato também verdadeiro para a China e a Índia.

Mesmo a visão de que, durante a Idade Média, o Ocidente estivesse totalmente imerso em obscurantismo e ignorância deve ser considerada com reservas. Em primeiro lugar, o Império Bizantino desempenhou o papel de continuação natural do Império Romano. Resultado da divisão do Império Romano, no ano de 395, em uma porção ocidental e em outra oriental, o Império Bizantino possuía uma população predominantemente cristã e sua língua principal era o grego. Nele, alguma atividade matemática sobreviveu, em nível elementar, consistindo sobretudo de estudos e comentários sobre textos clássicos. Essa atividade intelectual, ainda que limitada, teve uma importante função na preservação do conhecimento clássico.

A Europa ocidental, ou seja, os territórios que compunham o antigo Império Romano do Ocidente, viveu nos primeiros séculos da Idade Média um ambiente de decadência econômica, desordem e fragmentação política. Esse período foi, de fato, pouco fecundo para a atividade científica em geral. Alguma vida intelectual restou nos mosteiros em algumas regiões periféricas, como na Catalunha, na Irlanda e na Itália. Por outro lado, a doutrina cristã colocou o divino, o pecado e o inferno no centro das preocupações e interesses. O homem medieval, incapaz de conhecer o universo por meio de suas faculdades racionais, foi desestimulado a exercer atividades de observação da natureza e de pensamento científico.

4.3.2 Séculos XI a XIII

Um primeiro passo para a mudança do panorama científico europeu na Idade Média foi dado pelo francês Gerberto de Aurillac (c. 946-1003), que se tornou Papa com o nome de Silvestre II em 999. Gerberto se interessava por questões educacionais e escreveu textos sobre o *quadrivium* (aritmética, geometria, astronomia e música). O futuro Papa teve um papel fundamental na redescoberta do estudo da matemática nas escolas catedrais europeias — escolas ligadas às igrejas, que originalmente tinham a função de formar o clero. Gerberto foi o primeiro ocidental a empregar os algarismos indo-arábicos no ensino, mas ainda sem fazer o uso do zero. Foi ainda responsável por reintroduzir o uso do ábaco na Europa, em desuso desde a queda do Império Romano. Também é atribuída a Gerberto a introdução na Europa do astrolábio — instrumento inventado pelos gregos e aperfeiçoado pelos árabes, usado para encontrar a posição geográfica e calcular o tempo a partir da posição dos astros.

Figura 4.4: Papa Silvestre II e o demônio — Fonte: Cod. Pal. germ. 137, Folio 216v *Martinus Oppaviensis, Chronicon pontificum et imperatorum*, c. 1460.

Gerberto tornou-se admirador da matemática e da astronomia árabes quando, entre 967 e 969, esteve na Espanha e entrou em contato com o sistema de ensino árabe. Não se sabe ao certo se Gerberto de fato esteve na parte moura da Espanha, sendo mais provável que tenha visitado apenas a Catalunha cristã, região com fortes conexões com o mundo islâmico.

A introdução dos algarismos arábicos na Europa cristã encontrou, a princípio, forte resistência. Foram boicotados por muitos calculadores medievais, que os tratavam por "signos diabólicos desses cúmplices de Satanás que são os árabes". Herdeira da tradição romana, a Igreja Católica não aceitava a superioridade de elementos vindos de outra cultura. Por suas ligações com a cultura e a ciência árabes, Gerberto seria inclusive acusado de ter estudado magia e astrologia nas cidades árabes, o que alimentou a lenda de que ele fosse um feiticeiro pactuado com o demônio.

Os séculos XI e XII foram marcados por um redespertar da Europa. Apesar de ainda majoritariamente feudal, a Europa viveu um período de crescimento populacional e de urbanização, ao mesmo tempo em que assistiu a um processo de crescimento e sofisticação das atividades econômicas, com a intensificação do comércio, o aumento da circulação monetária e o início de atividades industriais. A igreja ergueu grandes catedrais, abriu escolas e os monastérios se tornaram ativos centros de cultura. O latim se tornou a língua dos eruditos, para em breve assumir o papel de língua franca da ciência.

Nesse mesmo período, começou a mudar o panorama da ciência na Europa ocidental. As Cruzadas (1095-1291), sequência de expedições militares convocadas pelo Papa com o fim de retomar o controle cristão sobre Jerusalém e a Terra Santa, colocaram em choque a Europa cristã e o mundo islâmico. Contudo, permitiram uma maior interação do Ocidente com o universo islâmico. Sábios europeus, como o inglês Adelardo de Bath (c. 1080-1152), usaram as bases estabelecidas pelos cruzados no Oriente Próximo para travar contato com a cultura e a ciência árabes. Adelardo, a saber, foi o responsável pela primeira tradução completa dos *Elementos* de Euclides para o latim.

Uma série de traduções de obras, sobretudo do árabe — mas também do hebreu e do grego — para o latim, fez o século XII ser conhecido como o "século das traduções". O contato com os árabes foi mais intenso em três regiões, que serviram de ponte entre a Europa cristã e o mundo islâmico: em primeiro lugar a Espanha, seguida pela Sicília e pelo Império Bizantino. Em Toledo, cidade espanhola durante séculos dominada pelos árabes que no século XI voltou ao domínio cristão, funcionou uma verdadeira escola de tradução, que se valeu de suas bibliotecas ricas em manuscritos árabes e de uma população versada no idioma árabe. As traduções, muitas vezes, eram feitas em duas etapas, envolvendo pelo menos dois tradutores: em um primeiro momento, a obra era traduzida do árabe para a língua vulgar para, em seguida, ser traduzida para o latim. Um dos mais conhecidos e prolíficos tradutores que trabalharam em Toledo foi Gerardo de Cremona (c. 1114-1187). São conhecidas mais de 80 obras por ele traduzidas, de filósofos, matemáticos e astrônomos, tanto clássicos quanto árabes. Seu trabalho foi de importância fundamental para a evolução subsequente da ciência.

Os séculos XII e XIII assistiram à fundação das primeiras universidades: Bolonha (1088), Oxford (1096), Salamanca (1134), Paris (1150), Cambridge (1209), Montpellier (1220) e Pádova (1222), entre outras. A palavra "universidade" provém do latim *universitas magistrorum et scholarium*, que significa explicitamente "comunidade de professores e estudiosos", tendo sido introduzida pela Universidade de Bolonha, considerada a primeira universidade.

A fundação das universidades foi uma das marcas da decadência do feudalismo e do desenvolvimento urbano na Europa Medieval. Elas se beneficiavam de garantias que as isentavam do controle de autoridades locais e propiciavam liberdade acadêmica. Eram compostas de faculdades especializadas: teologia, direito, medicina e artes. Esta última se ocupava de todas as outras ciências. Em primeiro lugar, eram ensinadas as artes do *trivium*: gramática, lógica e retórica, disciplinas que abordavam sobretudo habilidades da escrita e da fala. Essas eram seguidas pelas quatro artes matemáticas do *quadrivium*: aritmética, geometria, música e astronomia. As formações do *quadrivium* eram consideradas muito mais complexas e difíceis do que as do *trivium*. Segue daí a origem da palavra "trivial", que desde os tempos do Renascimento é empregada com o significado de simples ou ordinário (comum).

Várias das primeiras universidades nasceram sob os auspícios da igreja e muitas delas resultaram da evolução de escolas catedrais. Nos primeiros anos, as universidades foram dominadas por ordens monásticas, que não respondiam às autoridades eclesiásticas locais, mas apenas à autoridade papal. Seus membros podiam transitar de uma universidade a outra, sem considerações de fronteira. Foram dominadas pelo chamado "pensamento escolástico", que procurava sistematizar os objetos da fé cristã através de princípios e instrumentos racionais. Como resultado, a obra de Aristóteles foi difundida e o pensamento aristotélico passou a ser corrente nas faculdades de artes, estimulando uma renovação nas ciências e criando um ambiente onde a racionalidade dominava o misticismo. Em seus primeiros anos, as universidades tiveram resultados muito limitados no que diz respeito ao desenvolvimento científico. No entanto, o nascimento dessas instituições foi um marco na história das ciências pois, com poucos séculos de vida, elas passariam a ser o principal palco da atividade científica europeia.

4.3.3 Leonardo de Pisa, o Fibonacci

Se o século XII foi marcado pelas grandes traduções, no século XIII houve uma retomada da criação matemática em solo europeu. Leonardo de Pisa (c. 1170-1250), também conhecido como Fibonacci, é considerado o mais importante matemático da Europa Medieval. Pisa, no tempo de Leonardo, era uma importante cidade mercantil de onde partiam rotas comerciais para as cidades árabes conquistadas pelos cruzados. Filho de um comerciante, Fibonacci, quando jovem, passou uma temporada na Argélia, onde aprendeu o idioma árabe e estudou aritmética, ganhando o gosto pelo estudo da matemática. Viajou pelo mundo árabe como mercador e aproveitou para estudar matemática. Assim, Fibonacci entrou em contato com a álgebra árabe e com o sistema de numeração indo-arábico, tendo sido fortemente influenciado pelos trabalhos de al-Khwarizmi e de Abu Kamil. De volta a Pisa, em 1202, escreveu o *Liber Abaci* (Livro do Ábaco ou Livro de Cálculo), uma enciclopédia matemática que, em conjunto com sua *Practica Geometrica* de 1220 — que trata de aplicações da álgebra para a solução de problemas de geometria e trigonometria —, forneceu material para que os estudiosos italianos do século XIII tomassem contato com a matemática árabe e grega, preparando o terreno para os progressos que a álgebra italiana teria no período renascentista, dois séculos mais tarde.

O *Liber Abaci* teve grande importância na introdução do sistema de numeração indo-arábico no continente europeu. Fibonacci descreveu esse sistema, com seus nove símbolos e o zero, mostrando seu valor prático com aplicações à matemática comercial, conversões de pesos e medidas, cálculos de taxas de juros e de câmbio, dentre outras. A palavra “zero” foi através dele introduzida nos idiomas europeus modernos em sua forma *zephyrum*, versão latina para a palavra árabe *sifr*, que também está na raiz do vocábulo “cifra”. O quadro seguinte apresenta um trecho, contido no *Liber abaci*, da explicação de Fibonacci para a multiplicação no sistema árabe:

> “Se você quiser multiplicar quaisquer números de dois lugares não tendo unidades neles no primeiro lugar, como em 10 ou 40 ou 90, em cujo lugar o *zephyrum* é sempre necessário, então será feito assim: você escreve o número como eu disse acima (um número abaixo do outro) e o segundo lugar é multiplicado pelo segundo e os dois *zephyra* são colocados antes do produto, e assim nós teremos o produto de quaisquer tais multiplicações. Se você busca a multiplicação de 70 por 70, então ambos os 70 são escritos na maneira dada acima e a figura 7 que está no segundo lugar no número superior é multiplicada pelo 7 no inferior; haverá 49, antes do qual os dois *zephyra* são colocados, nomeadamente para aqueles que estão antes de cada 7; 4900 é feito, que é o produto da multiplicação procurada.”

Fibonacci é hoje, no entanto, mais conhecido pela chamada *sequência de Fibonacci*, apresentada no *Liber Abaci* como resposta para um problema envolvendo o crescimento de uma população de coelhos.

> Uma população de coelhos cresce de acordo com o seguinte modelo:
>
> - no primeiro mês há apenas um casal de coelhos;
> - os casais se reproduzem apenas no segundo mês de vida;
> - todo mês, cada casal com pelo menos dois meses de vida tem um casal de filhos;
> - os coelhos nunca morrem.
>
> Assim, se f_n é o número de casais no início mês n, obtemos, de maneira recursiva,
>
> $$f_n = \begin{cases} 1 \text{ se } n = 1, 2 \\ f_{n-1} + f_{n-2} \text{ se } n > 2 \end{cases}$$
>
> Os primeiros números dessa sequência são 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13,... e seus termos têm diversas propriedades interessantes. Por exemplo, dois termos consecutivos são sempre relativamente primos e o limite $\lim_{n\to\infty} f_{n-1}/f_n$ é a razão áurea $\Phi = (1+\sqrt{5})/2$.

4.4 Exercícios

1. Considere a parábola $y = x^2$. Produza um sólido pela revolução em torno do eixo x da região compreendida pela parábola, pelo eixo x, por $x = 0$ e $x = 1$. Mostre que o volume desse sólido é determinado a partir da integral $\int_0^1 x^4 dx$. Esse cálculo foi feito por Alhazen, sem dispor ainda da noção de integral.

2. A fórmula de Alhazen para a soma das quartas potências dos n primeiros números naturais é

$$\sum_{k=1}^{n} k^4 = 1^4 + 2^4 + \cdots + n^4 = \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n.$$

   Use essa fórmula para calcular $\int_0^1 x^4 dx$ através de somas de Riemann (ou seja, divida o intervalo $[0, 1]$ em n subintervalos iguais e construa retângulos inscritos à curva $y = x^4$ com base em cada um dos subintervalos. Calcule a área da poligonal formada por esses retângulos e, em seguida, faça $n \to \infty$).

3. Demonstre a seguinte relação trigonométrica:

$$\operatorname{sen} 3\theta = 3\operatorname{sen}\theta - 4\operatorname{sen}^3\theta.$$

   Note que, conhecido $a = \operatorname{sen} 3\theta$, fazendo $x = \operatorname{sen}\theta$, temos a equação de grau três

$$a = 3x - 4x^3.$$

   Encontrar raízes dessa equação equivale, portanto, ao problema clássico de trissecção do ângulo. Equações cúbicas dessa natureza foram estudadas por Omar Khayyam e por al-Kashi.

4. Usando o exercício anterior e o método iterativo de solução da equação cúbica de al-Kashi, calcule $\operatorname{sen} 1^{\circ}$ sabendo que $\operatorname{sen} 3^{\circ} = 0,0523$.

5. Partindo das propriedades de congruência de triângulos (que não dependem do postulado das paralelas), demonstre que os ângulos superiores do quadrilátero de Saccheri são iguais.

6. A propriedade de que a soma dos ângulos internos de um triângulo vale 180º é equivalente ao postulado das paralelas.

   (a) Mostre que a hipótese de Alhazen — se três ângulos de um quadrilátero são retos, então o quarto ângulo também o é — implica na propriedade da soma dos ângulos do triângulo.

   (b) Mostre que a hipótese do ângulo reto no quadrilátero de Saccheri — ou seja, seus ângulos superiores são ambos retos — também implica na propriedade da soma dos ângulos do triângulo.

7. Escreva, em linguagem moderna (e de forma mais sucinta), a explicação de Fibonacci para a multiplicação de dois números dada no quadro da página 76.

8. A razão áurea é o número racional $\Phi > 0$ definido da seguinte maneira: dois números a e b estão em razão áurea se

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \Phi$$

Mostre que Φ é a raiz positiva da equação $x^2 - x - 1 = 0$. Calcule essa raiz.

5

Do Renascimento europeu ao Cálculo

AULA 5: DO RENASCIMENTO EUROPEU AO CÁLCULO

OBJETIVOS

Ao terminar a leitura desse capítulo, o leitor deverá ser capaz de:

1. Compreender a mudança do panorama científico na Europa renascentista.
2. Entender a evolução da álgebra e do simbolismo algébrico no Renascimento.
3. Entender as contribuições matemáticas que levaram ao desenvolvimento da teoria do cálculo diferencial e integral.

5.1 O Renascimento

No final da Idade Média, a Europa viveu um período de problemas: a Guerra dos Cem Anos (1337-1453) — série de conflitos militares entre França e Inglaterra —, a Grande Peste (1348-1352) — pandemia de peste bubônica que em cinco anos dizimou entre 30 e 50 por cento da população europeia —, além de vários períodos sucessivos de colheitas ruins que disseminaram a fome. Foi uma era de decadência econômica, em que o misticismo ganhou espaço, resultando em um ambiente pouco fecundo para a criação humana e, em particular, para a produção científica.

Esse panorama sofreu uma mudança significativa no decorrer do século XV. No período que ficou conhecido como Renascimento, a Europa vivenciou um redespertar das atividades criativas, assistindo ao florescimento de diversas áreas, entre as quais a literatura, a arte e a ciência. O conhecimento clássico, revalorizado e revigorado, passou a ser um instrumento no questionamento dos padrões de autoridade vigentes. Uma marca do Renascimento foi a crença no potencial do homem: habilidades e faculdades humanas poderiam ser usadas para explorar os segredos do universo. O homem renascentista era capaz de estender seu domínio e controle sobre o mundo em que vivia. Contrastava com o homem medieval, um ser impotente diante da Providência divina. O ambiente criativo surgido no Renascimento, aliado ao desenvolvimento da técnica e à acumulação do saber empírico, lançou novos desafios e problemas a serem trabalhados pela ciência.

A Itália, berço do Renascimento, foi palco de um forte progresso econômico fundado na intensa atividade mercantil de suas cidades, com destaque para Veneza. Através das rotas comerciais com o Oriente, aportaram na Europa, além de mercadorias, conhecimentos e ideias. Com a queda de Constantinopla em 1453, muitos sábios bizantinos se refugiaram no Ocidente, trazendo na bagagem versões gregas de textos antigos que proporcionaram uma reavaliação das traduções existentes na Europa.

A invenção da prensa de tipos móveis pelo alemão Johannes Gutemberg (1398-1468) em 1434 criou a tecnologia para a produção em série de livros, evolução técnica que deu um impulso inédito à divulgação do conhecimento. Já no final no século

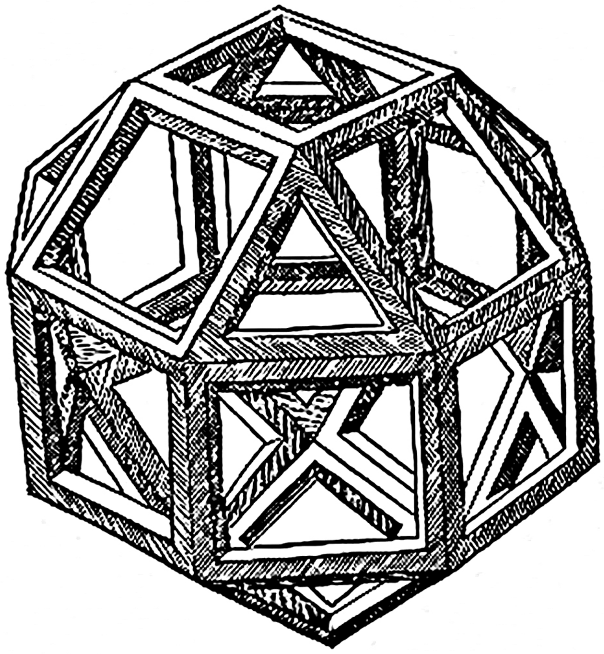


Figura 5.1: Rombicuboctaedro, desenho de Leonardo da Vinci, publicado na obra *Divina Proportione*, de Luca Pacioli, 1509.

XV, as oficinas de impressão de Veneza produziam mais livros que todos os copistas da Europa juntos. Porém, os livros permaneceram ainda raros e caros, distantes de serem artigos de acesso massificado. Os textos científicos, de leitura acessível a poucos, não estiveram dentre os primeiros livros impressos. Apenas em 1482 foi impressa uma edição de uma tradução latina dos *Elementos* de Euclides. Trabalhos de Arquimedes e de Apolônio ganharam edições impressas somente no século XVI.

A autoridade da Igreja Católica, principal núcleo de poder no período medieval, foi questionada de forma frontal no movimento conhecido como Reforma Protestante. Seu início se situa no século XVI, quando o padre alemão Martinho Lutero (1483-1546) propôs uma reforma do catolicismo, contestando suas doutrinas, rituais e sua estrutura eclesiástica, resultando na cisão do cristianismo com a criação das igrejas protestantes. O movimento, iniciado na Alemanha, estendeu-se para outras regiões da Europa, tais como a Suíça, a França, a Inglaterra, os Países Baixos e a Escandinávia. A princípio, configurou-se em um movimento de restauração religiosa, ancorado nas tradições medievais e com pouca conexão com os ideais humanistas do Renascimento. O Protestantismo, porém, instituiu novos valores em relação ao trabalho e às conquistas materiais, limitando os assuntos de fé à esfera privada. Ao privilegiar o julgamento individual em detrimento da autoridade religiosa, suas ideias acabaram por exercer forte atração sobre sábios e cientistas.

Os pensadores renascentistas atuavam isoladamente, normalmente a serviço de monarcas e mecenas. Ainda não existia algo parecido com uma comunidade científica. Nas relações entre os sábios, a rivalidade sobrepunha à colaboração. As universidades, muito conservadoras e dominadas pelo pensamento escolástico, não funcionavam ainda como polos geradores e irradiadores do saber. O sábio que melhor simboliza o período renascentista talvez tenha sido Leonardo da Vinci (1452-1519), homem de múltiplos interesses, em domínios diversos da arte, da ciência e da tecnologia. Dono de imaginação e criatividade ilimitadas, além de um profundo espírito de observação, Leonardo realizou experimentos de forma metódica e usou a expressão artística — sobretudo a pintura — em prol da descrição científica.

5.2 Novas ideias na astronomia

Um dos grandes marcos da Revolução Científica Renascentista foi a evolução das concepções astronômicas clássicas na direção de modelos matematizados e apoiados em verificações experimentais.

Ao final da Idade Média, eram plenamente aceitos os modelos cosmológicos gregos que colocavam a Terra como centro do universo. Para Platão, a Terra era uma esfera, estacionária, em torno da qual todos os planetas e estrelas giravam em esferas ou círculos. Em seu tempo, os corpos celestes conhecidos eram, em ordem crescente de distância da Terra: Lua, Sol, Vênus, Mercúrio, Marte, Júpiter, Saturno e, por fim, as estrelas fixas localizadas numa esfera celeste. Aristóteles elaborou um pouco mais o modelo de Platão. Colocou os corpos celestes em 56 esferas celestes, formadas por uma substância chamada éter, que se moviam em velocidades diferentes.

Ptolemeu sofisticou o sistema geocêntrico ao descrever a órbita de cada planeta por um sistema de duas esferas, cujo efeito combinado fazia cada planeta parecer mais próximo ou mais distante da Terra em pontos diferentes da sua órbita. O sistema de Ptolemeu, bastante condizente com as observações astronômicas, encontrou importantes aplicações na navegação e no cálculo do tempo. Era, no entanto, incapaz de descrever com precisão todos os fenômenos astronômicos observados.

O primeiro sábio renascentista a criticar os modelos astronômicos clássicos foi o polonês Nicolau Copérnico (1473-1543). Em seu livro *Sobre as Revoluções das Esferas Celestes*, Copérnico demonstrou a inexatidão do modelo ptolemaico e defendeu a ideia de que a Terra girasse em torno do Sol. Cônego da Igreja Católica e preocupado com as possíveis repercussões de suas conclusões, Copérnico hesitou por muito tempo em publicar seu trabalho, o que seria feito somente em 1543, ano de sua morte. Na concepção de Copérnico, a Terra era um planeta como os outros, possuindo movimentos de rotação em torno do Sol e em torno de seu eixo. O Sol ocupava o lugar de centro de rotação das esferas que continham os corpos celestes. Seu modelo, mesmo sem apresentar provas observacionais, uniformizou e sistematizou os movimentos planetários, sempre circulares e uniformes, com os períodos de revolução dos planetas aumentando em função da distância em relação ao Sol.

A visão de Copérnico a princípio não atraiu a atenção de estudiosos e muito menos foi alvo de condenação por parte da Igreja. A concepção heliocêntrica geraria polêmica apenas quando o teólogo, filósofo e frade dominicano italiano Giordano Bruno (1548-1600) defendeu a tese do universo infinito, onde o Sol era apenas mais

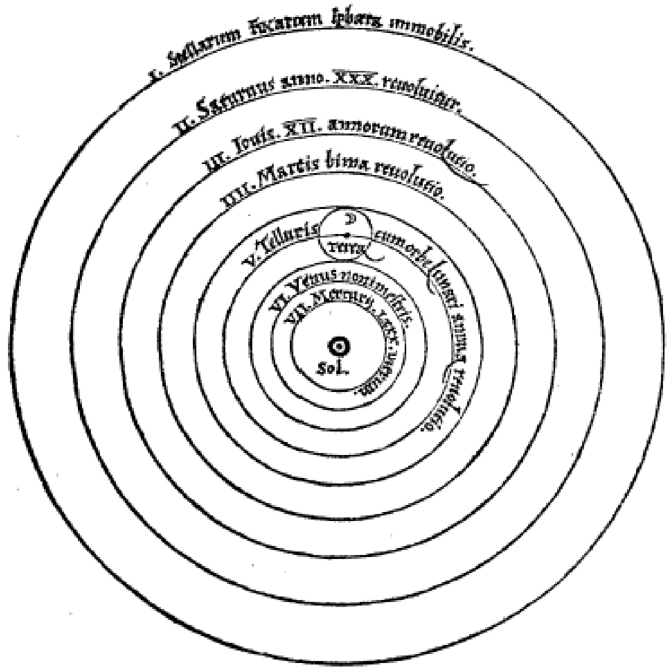


Figura 5.2: Modelo do universo segundo Copérnico — *Sobre as Revoluções das Esferas Celestes*, 1543.

uma estrela dentre muitas outras e onde ainda haveria muitos outros planetas dotados de vida inteligente como a Terra. Acusado de heresia — mas não por suas concepções acerca da astronomia —, Giordano Bruno seria condenado à fogueira pela Inquisição.

Um novo capítulo na astronomia foi iniciado pelo astrônomo dinamarquês Tycho Brahe (1546-1601). Em seu livro *De Nova Stella* (Sobre a Nova Estrela) de 1573, ele refutou a teoria das esferas celestes, mostrando que o céu não era perfeito e imutável. Tycho Brahe propôs um modelo astronômico em que combinou elementos dos sistemas de Copérnico e de Ptolemeu. Seu modelo era essencialmente geocêntrico, em que a Terra ocupava o centro do universo, o Sol e a Lua giravam em torno da Terra, enquanto os outros planetas giravam em torno do Sol. Tycho Brahe foi um importante astrônomo observacional, responsável por extensas e precisas observações astronômicas.

A formulação matemática que sedimentaria a teoria heliocêntrica como concepção astronômica amplamente aceita foi proposta pelo alemão Johann Kepler (1571-1630). De fé protestante, Kepler trabalhou para a corte do imperador Rodolfo II em Praga. Inicialmente foi assistente de Ticho Brahe, assumindo, após a morte deste, as funções de matemático e astrônomo da corte. O movimento dos planetas foi descrito por Kepler através de três leis matemáticas simples estabelecidas de forma empírica a partir de observações astronômicas. Para seu trabalho, as observações de Ticho Brahe foram essenciais, em especial aquelas sobre o movimento de Marte. As primeiras duas leis de Kepler sobre o movimento dos planetas foram publicadas em 1609 na obra *Astronomia Nova*. A primeira delas afirmava que cada planeta descrevia uma obra elíptica em que um dos focos era ocupado pelo Sol, enquanto a segunda dizia que uma reta unindo cada planeta ao Sol percorria áreas iguais em tempos iguais. A terceira lei de Kepler, publicada 1619 na obra *Harmonices Mundi* (A Harmonia do Mundo), dizia que para todos os planetas a razão T^2/a^3 era constante, onde T é o período da órbita planetária e a é o valor do semi-eixo maior da órbita do planeta.

Figura 5.3: Johannes Kepler,
retrato de 1610 de autor desconhecido
— *Benediktinerkloster*, Krems, Áustria.

A teoria heliocêntrica ganhou bases definitivas com as observações do astrônomo italiano Galileu Galilei (1564-1642). Galileu fez melhorias técnicas no telescópio, usado por ele para fazer observações astronômicas. Com base nelas identificou o sistema de fases do planeta Vênus, algo incompatível com o modelo geocêntrico de Ptolemeu. Em 1633, Galileu foi citado em um tribunal de inquisição e obrigado, sob tortura, a renegar suas doutrinas sobre o movimento da Terra. Deixou, no entanto, uma contribuição marcante no método científico que o faz ser considerado por muitos como o "pai" da ciência moderna. Galileu combinou de forma inovadora experimentação e matemática, tendo sido o primeiro dos pensadores modernos a afirmar que as leis da natureza são matemáticas. Em seu livro *Il Sagiatore* (O Ensaiador), de 1623, afirmou:

A filosofia encontra-se escrita neste grande livro que continuamente se abre perante nossos olhos, que não se pode compreender antes de entender a língua e conhecer os caracteres com os quais está escrito. Ele está escrito em língua matemática, os caracteres são triângulos, circunferências e outras figuras geométricas [...].

A evolução das ideias astronômicas promovida pelos sábios renascentistas teve enormes consequências filosóficas. O modelo clássico de universo hierarquizado, onde cada corpo tinha seu lugar natural, foi substituído por uma concepção de espaço homogêneo e infinito. O homem deixou de ocupar o centro imóvel do universo e a Terra perdeu sua primazia para se transformar em um astro como os outros. Pela primeira vez na história da ciência, um modelo teórico consagrado pela tradição e pela religião foi suplantado por uma formulação apoiada em verificações experimentais e em suas vantagens matemáticas.

5.3 Matemática e arte: a perspectiva

Os artistas renascentistas criaram a noção de perspectiva na arte: a técnica da representação de objetos tridimensionais no plano em consonância com a percepção óptica desses objetos. Ela contrapôs à representação puramente simbólica ou decorativa, presente na pintura medieval. Para os artistas renascentistas, o quadro era uma "janela", que funcionava como uma seção transparente do cone visual, formado pelo conjunto de raios luminosos que, partindo do objeto retratado, convergem para o olho do expectador. As leis da perspectiva são baseadas na existência de um "ponto de fuga", que pode ou não estar dentro da imagem retratada. Para o ponto de fuga convergem retas, de forma que os objetos parecem menores à medida que se aproximam dele.

O nome *óptica* tem origem grega e foi retomado pelos renascentistas para se referir à ciência que trata da natureza e do comportamento da luz. Euclides havia escrito sua *Óptica*, um livro estruturado de forma semelhante aos seus *Elementos de Geometria*, com resultados de natureza puramente geométrica, sem considerações sobre a natureza física da luz. Já a palavra de origem latina *perspectiva* era o nome usado na Idade Média para a ciência da visão, que tratava não apenas do comportamento da luz, mas também de questões tais como a anatomia e o funcionamento do olho humano.

Tentativas de representação em perspectiva já eram feitas na arte pré-renascentista. O pintor florentino Giotto di Bondone (c. 1266-1337), conhecido simplesmente por Giotto, possuía técnicas de representação em perspectiva que, embora em desacordo com o método geométrico moderno, produziam uma ilusão de profundidade. Seu trabalho representou um importante avanço na arte ocidental.

O primeiro conjunto de regras matemáticas para a obtenção da perspectiva correta foi criada em torno de 1413 por Filippo Brunelleschi (1377-1446), arquiteto famoso por projetar e construir a gigantesca cúpula da catedral de Florença. Brunelleschi buscou regras para produzir a "perspectiva artificial", ou seja, o conjunto de procedimentos capazes de fazer o olho humano enxergar as proporções da forma imaginada pelo criador da obra. O olho humano, por sua vez, estaria sujeito às regras da "perspectiva natural", ou seja, as leis matemática que regem a visão.

O pioneirismo na aplicação da perspectiva à pintura foi do genovês Leon Battista Alberti (1404-1472), artista, arquiteto e filósofo. Alberti era versado em ciências e enxergava a matemática como um campo comum para as artes e as ciências. Seus conhecimentos em óptica eram ligados à tradição inaugurada pelo matemático árabe

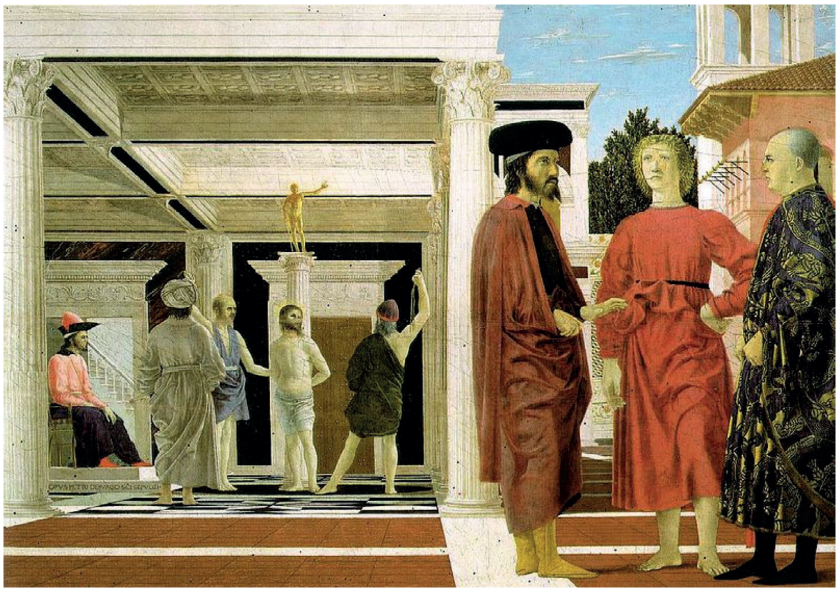


Figura 5.4: A Flagelação, de Piero della Francesca, c.1455-1460.
Pintura onde as técnicas de perspectiva são empregadas — *Palazzo Ducale*, Urbino, Italia.

Figura 5.5: O Massacre dos Inocentes, de Giotto, 1304-1306.
Pintura anterior ao desenvolvimento da técnica da perspectiva geométrica — Capela Scrovegni, Pádova, Italia.

Alhazen em seu *Tratado de Óptica*. Em seu *Tratatto della Pittura* (Tratado sobre a Pintura), de 1435, Alberti estabeleceu os princípios matemáticos da perspectiva para aplicação em pinturas bidimensionais. Esta obra teve forte influência sobre os artistas de sua época.

Piero della Francesca (c. 1415-1492), um dos grandes pintores italianos do século XV, explorou em sua obra a geometria e a perspectiva. Além de artista, foi um matemático reputado em seu tempo, tendo estudado as bases teóricas da perspectiva. Sua obra *De Prospectiva Pingendi* (Sobre a Perspectiva na Pintura), escrita na década de 1470, propôs avanços em relação ao trabalho de Alberti. Enquanto Alberti se limitou à perspectiva em figuras planas, della Francesca estudou figuras sólidas. Della Francesca foi o primeiro artista a produzir desenhos dos sólidos platônicos em perspectiva correta.

5.4 A álgebra renascentista

5.4.1 Luca Pacioli

A Renascença, em quase todos os campos do conhecimento, caracterizou-se pela retomada da tradição clássica grega. No entanto, a matemática no período renascentista foi marcada pelo desenvolvimento da álgebra, representando uma continuidade com respeito à tradição medieval árabe e europeia.

O frade franciscano Luca Pacioli (1445-1514) nasceu na cidade de Borgo San Sepolcro, na Toscana, também cidade natal de Piero della Francesca, de quem foi discípulo e amigo. Pacioli, que foi professor de matemática e colaborador de Leonardo da Vinci, publicou em 1494 o livro *Summa de Arithmetica, Geometria, Proporzioni di Proporzionalita* (Compêndio de Aritmética, Geometria, Proporções e Proporcionalidade), escrito em idioma vernacular. A obra abordava quatro assuntos: aritmética, álgebra, geometria euclidiana elementar e contabilidade. O livro, síntese de boa parte do conhecimento matemático de então, foi o primeiro livro impresso a tratar de álgebra, retomando a classificação das equações de segundo grau dos árabes. No que diz respeito à contabilidade, introduziu o chamado *método das partidas dobradas*, também conhecido como método veneziano. Esse é o sistema padrão usado em empresas e outras organizações para registrar transações financeiras, em que todos os movimentos são lançados em pelo menos duas contas, com o total de débitos devendo se igualar ao total de créditos. A contribuição de Pacioli veio a atender algumas necessidades de técnicas aritméticas surgidas com o desenvolvimento do sistema bancário nas cidades mercantis italianas.

Na obra *De divina proportione* (Sobre as proporções divinas), publicada em Veneza en 1509, Pacioli discorreu sobre proporções matemáticas e artísticas, sobretudo sobre a matemática da razão áurea e suas aplicações à arquitetura. No livro, há ilustrações dos sólidos platônicos desenhadas por Leonardo da Vinci. O terceiro volume do livro de Pacioli era uma tradução para o italiano, sem citar o autor original, da

Figura 5.6: Luca Pacioli, em pintura de 1495, de autor desconhecido, primeiro retrato autêntico de um matemático — *Museo di Capodimonte*, Nápoles, Itália.

obra *Sobre os Cinco Sólidos Regulares*, de Piero della Francesca, escrita originalmente em latim.

5.4.2 *Die Coss*

O interesse pelo estudo da matemática no período renascentista, em especial da álgebra, não ficou restrito à Itália, mas também foi despertado em outros pontos do continente europeu. Na Alemanha, vários livros de álgebra foram editados. A palavra germânica *Coss*, ou coisa, passou a ser usada para designar variável, seguindo o termo usado pelos árabes, que significava raiz ou coisa. Essa mesma palavra passou a ser usada para nomear a escola de algebristas alemães, que ficou sendo conhecida como *Die Coss*. Seu principal nome foi Michael Stifel (1487-1567), monge e matemático, que se converteu em pregador luterano itinerante e trabalhou na Universidade de Jena. Os algebristas alemães realizaram um importante trabalho no sentido de prover uma notação simples e eficiente. As notações germânicas, hoje universalmente empregadas $+$ e $-$, substituíram gradualmente as italianas p e m para a adição e a subtração. Os alemães introduziram o símbolo $\surd n$ para raiz quadrada de n. Essa notação evoluiu para $\surd z\, n$ e, mais tarde, para $\sqrt{n}$, formato que conhecemos hoje. Os algebristas alemães usavam uma letra para a variável e, para representar potências da variável, repetiam a letra tantas vezes quanto necessário. Assim, se A denotasse a variável x, AA seria usada para denotar x^2 e AAA para denotar x^3.

5.4.3 Cardano e a solução de equações cúbicas

Gerolamo Cardano (1501-1576) foi um médico e matemático italiano de grande reputação e espírito universalista. Professor em Bolonha e em Milão, Cardano foi o mais importante algebrista de sua época. Envolveu-se em uma das mais interessantes histórias de rivalidade da matemática com Nicollo Fontana (c. 1499-1557), conhecido como Tartaglia. Em 1535, Tartaglia venceu um desafio público envolvendo a solução de equações cúbicas dos tipos

$$x^3 + px^2 = q \quad \text{e} \quad x^3 + px = q.$$

Tartaglia revelou seu método de solução de equações cúbicas a Cardano sob o juramento de que este guardasse segredo. No entanto, em 1545, com a publicação do seu livro *Artis Magnae Sive de Regulis Algebraicis* (Livro Número Um sobre a Grande Arte ou as Regras da Álgebra), Cardano tornou público o método de resolução de Tartaglia, gerando a ira do mesmo. Aparentemente, Cardano decidiu divulgar a solução de Tartaglia após tomar conhecimento de trabalhos não publicados de Scipione del Ferro (c. 1465-1526), com data anterior à solução de Tartaglia.

Em seu *Ars Magna*, Cardano tratou de forma distinta vários tipos de equações de terceiro grau. Assim como acontecia com os algebristas árabes, os coeficientes negativos não eram admitidos, sendo que termos de graus distintos podiam aparecer dos dois lados da equação. Em analogia ao método geométrico de Al-Khwarismi para equações quadráticas, que se baseava em "completar o quadrado", o método de Cardano, também geométrico, seria algo como "completar o cubo". Cardano tomava como representante de uma categoria geral alguma equação com coeficientes numéricos específicos. Por exemplo, um problema da forma "o cubo e seis vezes o lado igual a 20", ou seja, a equação $x^3 + 6x = 20$, apresentava o método que se aplicava a todas as equações do tipo $x^3 + px = q$. As soluções, apresentadas em forma retórica, eram longas, resultando em um método de solução que recaía na fórmula conhecida nos dias de hoje no seguinte formato:

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{(p/3)^3 + (q/2)^2} + q/2} - \sqrt[3]{\sqrt{(p/3)^3 + (q/2)^2} - q/2}.$$

Ao resolver equações do tipo "cubo igual a coisa e número", tratadas através do exemplo $x^3 = 15x + 4$, Cardano chegou ao resultado

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}.$$

Cardano não foi capaz de dar uma explicação, pois, se por um lado sabia não existir raiz quadrada de números negativos, por outro podia verificar, por inspeção direta, que $x = 4$ era uma solução para a equação. Os números complexos fizeram assim sua aparição na matemática. Foram chamados por Cardano de "números sofistas" e tratados como "sutis e inúteis".

Em seu trabalho, Cardano mostrou como eliminar o termo em x^{n-1} de uma equação de grau n, usando uma translação do tipo $y = x + h$. Observou ainda que as equações de grau três podem possuir até três raízes e as de grau quatro, até quatro raízes. Cardano mostrou ainda como resolver equações de grau quatro reduzindo-as ao grau três, método que ele atribuiu a seu discípulo Ludovico Ferrari (1522-1565).

Cardano denota a igualdade

$$(5+\sqrt{15})\cdot(5-\sqrt{15}) = 25-(-15) = 40$$

por
5p : Rm : 15
5m : Rm :15
25m : m : 15qd est 40.

Após terem surgido no trabalho de Cardano, as raízes quadradas de números negativos seriam definitivamente incorporadas à álgebra com o trabalho de Rafel Bombelli (1526-1572), último grande algebrista do Renascimento italiano. Admirador de Cardano, Bombelli escreveu um tratado de álgebra que, além de contribuir para um formulação mais abstrata e teórica dessa disciplina, teve o mérito de divulgar os problemas de Diofanto no Ocidente. Retomando o problema da solução de equações cúbicas, Bombelli buscou compreender o aparecimento de soluções envolvendo raízes quadradas de números negativos. Passou a designar esses objetos por *piu de meno* e *meno di meno*, denotando $+\sqrt{-10}$ por *p.d.m.* 10 e $-\sqrt{-10}$ por *m.d.m.* 10. Para Bombelli, as raízes das equações eram expressas como somas de números positivos modificados por um dos quatro símbolos: *piu*, *meno*, *piu di meno* e *meno di meno*, correspondendo, em linguagem moderna, a $+, -, +i$ e $-i$. Propôs ainda regras de multiplicação desses 4 elementos. Por exemplo, *piu di meno via meno di meno fa piu*, o que significa $(+i)(-i) = +1$.

5.4.4 François Viète e o simbolismo algébrico

O passo decisivo para que a notação algébrica avançasse na direção do que conhecemos hoje foi dada pelo francês François Viète (1540-1603), matemático e advogado, mais conhecido em seu tempo por ter sido conselheiro particular do rei Henrique IV. De intensa carreira política, dedicou pouco tempo a sua obra científica. Viète passou a designar por letras não somente as variáveis e as potências das variáveis, o que já era feito em sua época, mas também os coeficientes das variáveis. Com essas letras ele formou expressões algébricas, com as quais podia operar de acordo com as regras já conhecidas na álgebra do seu tempo. Viète empregou vogais A, E, I, O, U para as variáveis desconhecidas e consoantes $B, C, D, \ldots$ para as variáveis conhecidas, ou seja para os coeficientes da equação. Para o quadrado da variável A, empregava a notação A *quadratus*, enquanto o cubo da mesma variável era denotado por A *cubus*. A multiplicação era indicada pela palavra *in* e a igualdade por uma abreviatura de *aequalis*. Viète realizou importantes progressos no cálculo algébrico e em suas aplicações. No entanto, sua contribuição mais significativa talvez tenha sido a de libertar a álgebra de casos particulares, permitindo que esta se tornasse o estudo de tipos gerais de expressões e de equações. Com isso, seu trabalho simplificou a manipulação de expressões e criou condições para uma maior atenção à estrutura de cada problema.

5.5 Desargues e a geometria projetiva

Leon Battista Alberti, ao estabelecer os princípios da técnica da perspectiva em seu *Tratatto della Pitura*, propôs o seguinte problema:

Quais são as propriedades geométricas comuns a duas perspectivas da mesma figura?

O estudo geométrico visando dar uma resposta a essa questão foi empreendido pelo arquiteto, engenheiro e matemático francês Girard Desargues (1591-1661), que nasceu e viveu na cidade de Lion. Esse trabalho deu origem a uma subárea da geometria conhecida como geometria projetiva. No tempo de Desargues, diversas edições das *Cônicas* de Apolônio foram publicadas, surgindo um grande interesse pelo estudo dessa obra. Desargues procurou dar à teoria de Apolônio contribuições motivadas pela técnica artística da perspectiva, ao mesmo tempo em que buscou fornecer aos artistas, engenheiros e arquitetos uma formulação matemática mais precisa para essa técnica.

Desargues partiu da definição de uma cônica como interseção de um cone de base circular com um plano. Assim, uma cônica passou a ser interpretada como a projeção, com centro no vértice do cone, do círculo da base sobre o plano incidente. Essa concepção projetiva permitiu substituir o estudo separado de cada tipo de cônica (círculo, elipse, hipérbole e parábola) por uma teoria geral. Desargues introduziu, em cada reta, um ponto no infinito, seguindo a ideia de Alberti de transformar retas paralelas em retas concorrentes. Esse ponto, onde se intercepta um sistema de retas paralelas, corresponde ao "ponto de fuga" da perspectiva. Com essa ideia, deixa de existir a noção de paralelismo e todas as retas contidas em um plano passam a ter a mesma natureza no que diz respeito à incidência. A união de todos os pontos no infinito forma uma reta, a reta no infinito.

O seguinte teorema é conhecido como Teorema de Desargues (veja Figura 5.7): dois triângulos, no plano ou no espaço, têm os vértices dois a dois sobre retas concorrentes se, e somente se, seus lados se encontram dois a dois em pontos que estão sobre a mesma reta. Na figura abaixo, os dois triângulos ABC e $A'B'C'$ são tais que as retas AA', BB' e CC' se interceptam no ponto P (ou seja, estão em perspectiva central, sendo P o centro de perspectiva), o que equivale ao fato de R, Q e S estarem sobre a mesma reta t (ou seja, estão em perspectiva axial, sendo t o eixo de perspectiva).

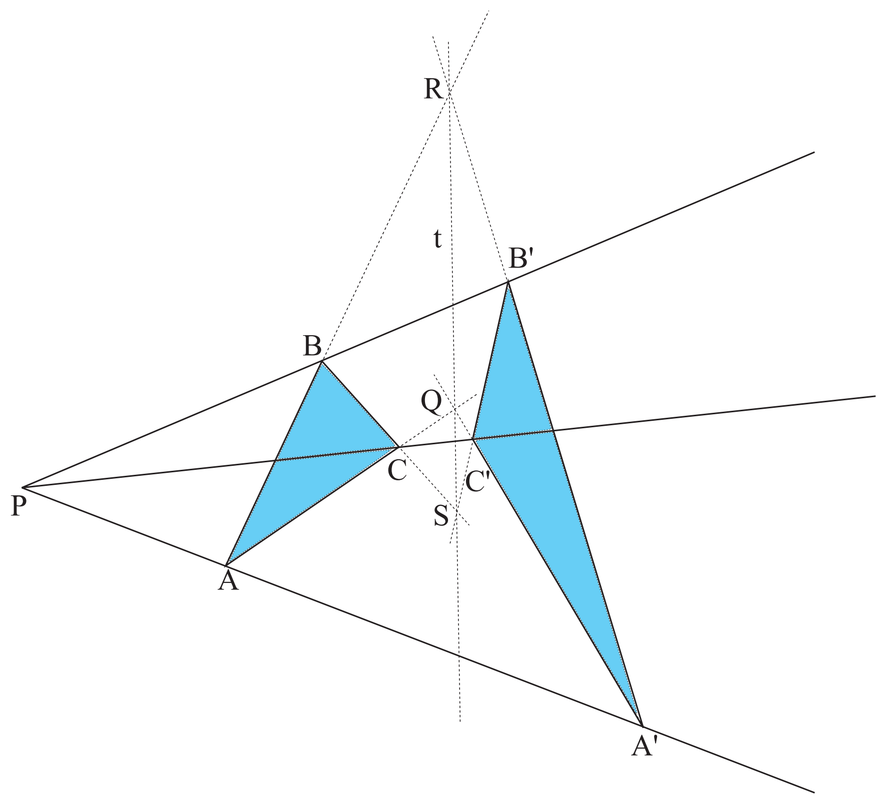


Figura 5.7: O Teorema de Desargues.

5.6 Descartes e a geometria analítica

Um capítulo fundamental para a construção da matemática moderna foi escrito por René Descartes (1596-1650), filósofo e matemático francês que viveu por duas décadas na Holanda. Descartes foi uma figura central do racionalismo, corrente filosófica que preconizava a busca da verdade por meios intelectuais e dedutivos em contraposição aos meios sensoriais. Suas contribuições filosóficas e matemáticas fizeram dele um dos pilares da Revolução Científica, que ganhou corpo no final do Renascimento e estabeleceu as bases da ciência moderna.

Os fundamentos da filosofia da ciência de Descartes, segundo a qual tudo era explicável em termos de matéria e movimento, estão em seu tratado filosófico mais importante, o *Discurso do Método para Bem Conduzir a Razão e Buscar a Verdade nas Ciências*, de 1637.

Se, por um lado, a filosofia de Descartes era inovadora e revolucionária para sua época, por outro sua obra matemática inseriu-se na corrente evolutiva que teve início com os algebristas árabes e prosseguiu com os matemáticos do Renascimento. As bases da teoria hoje conhecida por geometria analítica foram lançadas em seu trabalho matemático mais importante, *A Geometria*, de 1637. Esse texto nasceu como um conjunto de três apêndices ao *Discurso do Método* e, a princípio, sua

Figura 5.8: Retrato René Descartes — Pintura de 1649, de Frans Hals, Museu do Louvre.

função era ilustrar o método filosófico de Descartes. *A Geometria*, que apenas mais tarde ganhou existência como obra independente, era aberto com a seguinte frase:

Todos os problemas em geometria podem facilmente serem reduzidos a termos tais que basta o conhecimento dos comprimentos de algumas retas para que sejam construídos.

A primeira seção de *A Geometria* era intitulada "Como o cálculo aritmético se relaciona às operações de geometria". De fato, a nova concepção de geometria proposta por Descartes, muito mais do que a aplicação da álgebra à geometria, buscava a tradução das operações aritméticas para a linguagem geométrica. O seu método tinha dois objetivos centrais: libertar a geometria do uso de diagramas através de procedimentos algébricos e dar significado às operações algébricas através da interpretação geométrica.

Diante de um problema geométrico, Descartes o convertia em equações que eram em seguida simplificadas por métodos algébricos, para finalmente serem resolvidas geometricamente. A obra de Descarte representou um significativo avanço da álgebra formal, tanto em termos de notação como de interpretação geométrica. A notação sofreu grande evolução e assumiu um formato muito próximo do atual. Em *A Geometria*, as variáveis eram denotadas pelas últimas letras do alfabeto, enquanto as letras iniciais do alfabeto eram reservadas para os parâmetros. Esse é o primeiro momento da história da matemática em que o leitor contemporâneo poderia identificar, sem dificuldades, a notação empregada. Como exemplo, a expressão

$$y^3 -- byy -- cdy + bcd + dxy \propto 0$$

representava uma equação nas variáveis x e y, com parâmetros b, c e d, que, na notação moderna, se escreveria como

$$y^3 - by^2 - cdy + bcd + dxy = 0.$$

No trabalho de Descartes há uma significativa mudança de perspectiva em relação à álgebra de seus predecessores. Descartes deixou de considerar quantidades da forma x^2 ou x^3 como quadrados ou cubos geométricos, passando a considerar suas grandezas como comprimentos de segmentos de reta. Tornou sua álgebra muito mais flexível ao abandonar o princípio da homogeneidade.

No entanto, há poucos elementos em *A Geometria* que possibilitem identificar o que hoje conhecemos como geometria analítica. Descartes não trabalha sistematicamente com sistema de coordenadas retangulares, fórmulas para distâncias, inclinações e ângulos de retas. Além do mais, o fato, central na geometria analítica, de que equações em duas variáveis correspondem a lugares geométricos no plano, aparece apenas quando estuda equações do tipo $y^2 = ay - bxy + cx - dx^2$, equação geral de uma cônica passando pela origem.

5.7 Pierre de Fermat

Pierre de Fermat (1601-1665) foi um advogado e político francês que viveu na cidade de Toulouse. Fermat tinha a matemática como um hobby e nunca atuou como matemático profissional. Porém, foi um dos maiores gênios criativos da matemática do seu tempo. Deixou contribuições significativas em diversas áreas, que o fazem ser visto como um dos precursores da moderna teoria dos números e ainda como um dos criadores da geometria analítica e do cálculo diferencial. Fermat não escreveu obras completas, sendo que muitos dos seus trabalhos permaneceram manuscritos em vida e ficaram conhecidos através de cartas a seus amigos e colaboradores.

Em seus estudos de aritmética, Fermat retomou o trabalho de Diofanto, cujas obras, traduzidas para o latim, haviam despertado o interesse dos matemáticos desde o Renascimento. Fermat, de posse de uma tradução latina da *Aritmética* de Diofanto, fez anotações nas margens do livro que se tornariam célebres. Diofanto, em seus problemas, considerava soluções racionais, enquanto Fermat restringiu o universo de soluções possíveis aos números inteiros. Seus interesses principais em aritmética estavam nos números primos e nas propriedades de divisibilidade. Alguns dos resultados propostos por ele seriam provados apenas por seus sucessores. Por exemplo, o chamado *Pequeno Teorema de Fermat*, que afirma que

Se p é primo e a é um número não divisível por p o número $a^{p-1} - 1$ é divisível por p.

A primeira demonstração desse resultado foi publicada por Leonhard Euler em 1741. Fermat conjecturou ainda que os números da forma $F_n = 2^{2^n} + 1$ fossem todos primos. Euler demonstrou que a conjectura falha para $F_5 = 2^{32} + 1$.

A mais célebre conjectura atribuída a Fermat ficaria conhecida como o *Último Teorema de Fermat*:

Para $n > 2$, não existem números inteiros positivos x, y e z satisfazendo a identidade $x^n + y^n = z^n$.

Este resultado foi conjecturado por Fermat em uma anotação escrita na margem da *Aritmética* de Diofanto. Fermat, usando um método indutivo, apresentou uma demonstração do resultado para $n = 4$. Observou, contudo, que não havia espaço para escrever a demonstração do caso geral. De fato, o Último Teorema de Fermat se transformou em um dos problemas mais célebres da história da matemática, atraindo a atenção de várias gerações de matemáticos e estimulando enormes desenvolvimentos na teoria dos números. Uma demonstração satisfatória foi obtida apenas em 1995 pelo matemático inglês Andrew Wiles, usando métodos sofisticados, o que faz crer aos historiadores da matemática que, de fato, uma demonstração geral do resultado não estava ao alcance de Fermat.

Fermat se empenhou em reconstruir a obra *Lugares Planos*, de Apolônio, a partir das referências contidas na *Coleção* de Pappus. Nesse trabalho, Fermat descobriu, em 1636, o princípio fundamental da geometria analítica: uma equação envolvendo duas variáveis descreve uma curva no plano. Fez essa constatação um ano antes da publicação da *Geometria* de Descartes e, por essa razão, Fermat pode ser considerado coinventor da geometria analítica. Fermat realizou estudos sobre equações de retas e de cônicas e explorou esses assuntos em um pequeno tratado intitulado *Introdução aos Lugares Planos e Sólidos*, publicado apenas após a sua morte. Sua exposição era muito mais clara e sistemática que a de Descartes e seu método muito mais próximo da visão moderna. Por exemplo, Fermat faz uso de um sistema de eixos coordenados ortogonais. O uso de coordenadas representou uma evolução histórica fundamental na matemática, tendo surgido em um contexto no qual as técnicas algébricas desenvolvidas pelos matemáticos medievais e renascentistas foram aplicadas aos problemas geométricos clássicos.

Fermat produziu um outro tratado intitulado *Método para Encontrar Máximos e Mínimos*. Fermat estudou curvas do tipo $y = x^n$, onde $n \in \mathbb{Z}$, hoje conhecidas como "parábolas" ou "hipérboles de Fermat", nos casos em que n é positivo ou negativo, respectivamente. Para curvas polinomiais da forma $y = f(x)$, produziu um método para encontrar os pontos de máximo e de mínimo que o coloca como um dos precursores do cálculo diferencial.

O método de Fermat para encontrar máximos e mínimos de uma função polinomial $f(x)$ parte do pressuposto que, em um ponto de máximo ou de mínimo x, os valores de $f(x)$ e de $f(x+e)$, para e pequeno, são próximos. Fermat então forçou a igualdade $f(x) = f(x+e)$, para em seguida, dividir o resultado por e e fazer $e = 0$. Os pontos de máximo e de mínimo eram então calculados igualando-se a zero a expressão obtida:

$$g(x) = \frac{f(x+e) - f(x)}{e}|_{e=0}.$$

Essa expressão é, de fato, igual à derivada da função $f(x)$, ou seja

$$g(x) = \lim_{e \to 0} \frac{f(x+e) - f(x)}{e} = f'(x).$$

Fermat também desenvolveu uma técnica para encontrar tangentes a uma curva polinomial do tipo $y = f(x)$. Não apresentou justificativas convincentes para seu método, limitando-se a dizer que ele era similar àquele usado para encontrar máximos e mínimos. Por isso, o procedimento de Fermat não ganhou aceitação ampla pelos matemáticos de sua época.

O método de Fermat para calcular a tangente no ponto $(a, f(a))$ partia da ideia que, para e pequeno, o ponto $(a+e, f(a+e))$ poderia ser considerado sobre a reta tangente (veja Figura 5.9). Assim, se T é a intercessão da tangente com o eixo x e d é a distância entre os pontos T e $(a, 0)$, considerando semelhança de triângulos, a seguinte proporção é encontrada:

$$\frac{f(a)}{d} = \frac{f(a+e)}{d+e}.$$

Essa relação era então manipulada, o resultado dividido por e para em seguida fazer $e = 0$. A expressão encontrada permitia calcular valor de d. A inclinação da reta tangente obtida, $m = f(a)/d$ é exatamente o que conhecemos como $f'(a)$.

Fermat também obteve resultados a respeito de áreas sob curvas, produzindo um método para calcular, na notação moderna, $\int_a^b x^n dx$, para n fracionário, com $n \neq 1$. Generalizou um resultado de Bonaventura Cavalieri, outro dos precursores do cálculo, sobre quem falaremos adiante.

5.8 Blaise Pascal

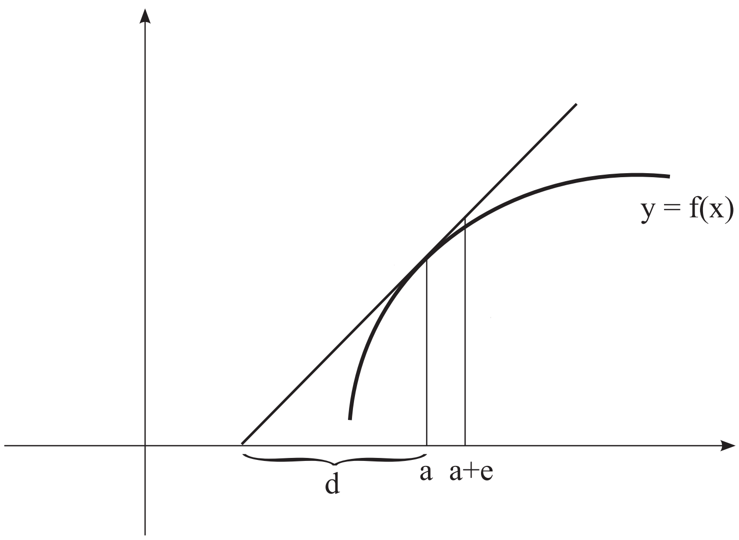


Figura 5.9: O método de Fermat para a reta tangente.

O francês Blaise Pascal (1623-1662), filho de um matemático, desde muito jovem demonstrou um excepcional talento para a matemática. Tomou contato com as ideias de Desargues e, aos 16 anos de idade, publicou um texto, de uma só página, contendo um resultado hoje conhecido como *Teorema de Pascal*: os lados opostos de um hexágono inscrito em uma cônica se interceptam em pontos colineares.

Pascal é considerado um dos fundadores da teoria de probabilidades. Trabalhou nesse assunto motivado por problemas envolvendo jogos de dados. Nunca publicou suas ideias, ficando elas registradas em correspondências com Pierre de Fermat. Baseado nessas correspondências, o matemático holandês Christiaan Huygens (1626-1695) escreveu em 1657 o texto *Sobre o Raciocínio no Jogo de Dados*, considerado o primeiro livro sobre a teoria de probabilidades. Pascal estudou propriedades do *triângulo aritmético*, hoje conhecido como *triângulo de Pascal*, formado pela disposição em linhas e colunas dos coeficientes binomiais $\binom{n}{k}$. Em seu *Tratado sobre o Triângulo Aritmético* (1653) apresentou a primeira formulação explícita do princípio de indução matemática.

Pascal foi um matemático brilhante. Porém, em 1654, aos trinta anos de idade, abandonou sua produtiva vida científica em prol da teologia e da filosofia. Voltou à matemática apenas nos anos de 1658 e 1659. Fez estudos sobre a cicloide (curva descrita por um ponto sobre um círculo que rola sobre uma reta). Encontrou áreas, volumes e centros de gravidade. Em 1658, publicou o *Tratado sobre os Senos do Quadrante do Círculo*, em que desenvolveu estudos sobre a integração da função seno. Esteve bem próximo de criar a teoria do cálculo, tanto que Gottfried Leibniz, um dos criadores dessa teoria, reconheceu ter se inspirado nas ideias de Pascal.

5.9 O princípio de Cavalieri

O milanês Bonaventura Cavalieri (1598-1647), discípulo de Galileu, foi professor de matemática em Bolonha e desenvolveu um método para operar com indivisíveis no cálculo de áreas e volumes. Este assunto foi tema de seu influente livro *Geometria Indivisibilibus Continuorum Nova Quadam Ratione Promota* (Geometria desenvolvida por um novo método através dos indivisíveis do contínuo), publicado em 1635. Mesmo sem possuir uma definição formal de indivisível, Cavalieri caracterizou os elementos infinitesimais nos quais se decompõem regiões planas e sólidos. Ele considerou uma região plana como sendo a união de linhas paralelas a uma reta dada e uma região sólida como uma união de seções planas paralelas a um plano fixado. De posse dessas decomposições e ciente da dificuldade em somar uma quantidade infinita de indivisíveis, Cavalieri evitou calcular áreas ou volumes pela soma desses elementos indivisíveis, mas desenvolveu um método para relacionar áreas ou volumes de figuras em que os indivisíveis têm relação constante.

Aplicamos o princípio de Cavalieri para calcular a relação entre as áreas da elipse $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$ e do círculo $x^2 + y^2 = a^2$. Considerando somente as porções das duas figuras no semiplano superior, a elipse é limitada superiormente pela curva $y = (b/a)\sqrt{a^2 - x^2}$, enquanto o círculo é limitado por $y = \sqrt{a^2 - x^2}$. Assim, decompondo a elipse e o círculo em segmentos verticais, a relação entre os comprimentos dos segmentos correspondentes das duas figuras vale b/a. Isso implica que a mesma razão vale para suas áreas, de onde se conclui que

$$A_{\text{elipse}} = \frac{b}{a} A_{\text{círculo}} = \frac{b}{a} \pi a^2 = \pi ab.$$

Através de seu método, Cavalieri efetuou o cálculo da quadratura de $y = x^n$, com n inteiro e $n \neq -1$, obtendo o resultado que hoje conhecemos como

$$\int_0^a x^n dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}.$$

5.10 John Wallis e Isaac Barrow

Os métodos dos franceses Descartes e Fermat fizeram muito sucesso na Inglaterra. O matemático John Wallis (1616-1703), professor de geometria em Oxford, publicou em 1655 um texto sobre geometria analítica intitulado *Tratactus de Sectionibus Conicis* (Tratado sobre seções cônicas), em que procurou aritmetizar o assunto, substituindo, sempre que possível, conceitos geométricos por numéricos. Uma tentativa de aritmetizar a geometria de indivisíveis de Cavalieri foi feita por Wallis em sua obra *Arithmetica Infinitorum*, também publicada em 1655. Nesta obra, Wallis usou um método envolvendo séries infinitas para calcular quadratura de curvas $y = x^n$, para n inteiro com $n \neq -1$. Vale destacar que o símbolo ∞ para denotar o infinito aparece pela primeira vez na obra de Wallis.

O matemático inglês Isaac Barrow (1630-1677), professor em Cambridge, desenvolveu um método para encontrar tangentes que se parece bastante com o que é usado hoje no cálculo. Seu procedimento era similar ao de Fermat, mas no lugar de usar um único incremento — que Fermat denotava por e — Barrow usava duas quantidades, equivalentes ao que hoje chamamos de Δx e Δy. Para uma curva definida pela equação polinomial $f(x, y) = 0$, substituía x e y por $x + e$ e $y + a$, desprezava os termos que não continham a ou e para, a seguir, eliminar os termos com grau maior que um em a e e. Então, considerava o *triângulo característico* da curva (Figura 5.10) obtendo a razão $a/e = MP/TP$ por semelhança de triângulos para, enfim, calcular o valor da subtangente TP.

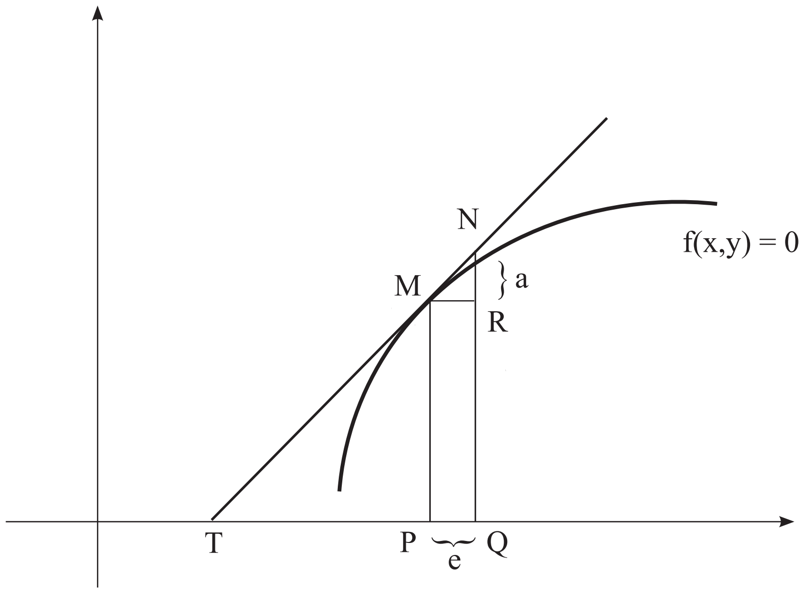


Figura 5.10: Triângulo característico

Vamos aplicar o método de Barrow para a parábola $y^2 = px$. Substituindo x e y por $x + e$ e por $y + a$ temos

$$(y + a)^2 = p(x + e) \Rightarrow y^2 + 2ay + a^2 = px + pe.$$

Eliminando os termos independentes de a ou e e os termos de grau maior que um nesses incrementos, obtém-se

$$2ay = pe \Rightarrow \frac{a}{e} = \frac{p}{2y}.$$

Isso permite, a partir da razão $y/TP = a/e$, calcular o valor da subtangente TP.

5.11 Isaac Newton

Na primeira metade do século XVII muitos resultados de natureza infinitesimal já eram conhecidos. No entanto, faltava ainda um trabalho de sistematização que colocasse esses resultados isolados dentro de uma estrutura teórica unificada. Esse trabalho foi feito de forma independente por dois homens: pelo físico inglês Isaac Newton (1642-1727) e pelo filósofo, jurista e político alemão Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). Ambos criaram métodos gerais e processos algorítmicos que transformaram o cálculo infinitesimal em uma área com vida própria, independente da geometria.

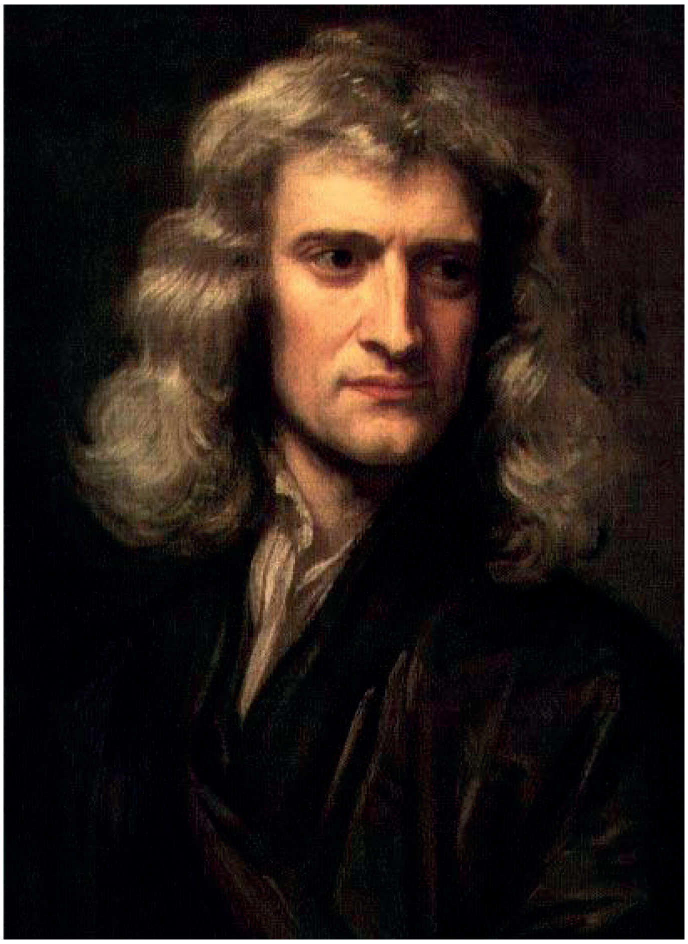


Figura 5.11: Retrato Isaac Newton. Pintura de 1689, de Godfrey Kneller — *Isaac Newton Institute for Mathematical Sciences*, Cambridge, Reino Unido.

Newton estudou no *Trinity College* em Cambridge, onde foi aluno de Barrow. Desde o início de seus estudos, em 1661, leu obras de diversos matemáticos, entre eles Euclides, Descartes, Galileu e Wallis. Em pouco tempo atingiu a fronteira da matemática conhecida em seu tempo e já possuía uma base teórica para propor contribuições inéditas. Entre 1665 e 1666 interrompeu seus estudos em razão de uma epidemia de peste. Foi nesse período que, segundo ele, desenvolveu suas ideias fundamentais sobre mecânica e sobre o cálculo infinitesimal. De volta a Cambridge, em 1669 sucedeu Barrow na cátedra de matemática, função que ele manteve até 1695, quando abandonou a pesquisa e aceitou um emprego na Casa da Moeda em Londres. Newton se tornou ainda, em 1703, presidente da *Royal Society* — a mais antiga das sociedades científicas, fundada em 1660 — posto que conservaria até o final de sua vida.

Newton escreveu três trabalhos sobre o cálculo diferencial, todos eles publicados apenas no início do século XVIII, anos depois de escritos. Por essa razão, esses trabalhos tiveram uma influência muito limitada no meio matemático. Newton, temeroso em relação às críticas, hesitava em publicar seus trabalhos. Sua obra mais famosa, considerada por muitos o livro mais importante da história da ciência, foi *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (Princípios matemáticos da filosofia natural), publicado em 1687. Nessa obra, em que propôs suas leis de movimento e a lei de gravitação universal, estabelecendo os fundamentos da mecânica clássica, já apareceram menções à sua teoria de fluxões. Diversas proposições sobre velocidades, acelerações, tangentes e curvaturas presentes nos *Principia* motivaram as pesquisas de Newton sobre o cálculo infinitesimal. Newton apresentou três concepções distintas para o cálculo: a concepção infinitesimal, o método das fluxões e o método das primeiras e últimas razões.

5.11.1 A concepção infinitesimal

Newton, influenciado pelos trabalhos de Wallis e de Barrow, trabalhou com quantidades infinitesimalmente pequenas, por ele chamadas de *momentos*. Para o cálculo da área abaixo de uma curva, considerou o momento da área, ou seja, o crescimento da área da região quando a variável x aumenta da quantidade infinitesimal o. Ele calculou a taxa de crescimento da área no ponto de abscissa x e conclui que ela é igual à ordenada $y = f(x)$ (Figura 5.12).

Reciprocamente, Newton determinou que a área sob a curva e equação $y = f(x)$ era dada pelo procedimento inverso ao da derivação, ou seja, calculando a integral indefinida de f. Newton estabeleceu o vínculo entre quadratura e derivada em 1669 na obra *De Analysi per Aequationes Numero Terminorum Infinitas* (Sobre a Análise de Equações com um Número Ilimitado de Termos), publicada apenas em 1711. Contudo, não há na obra definições precisas de derivada ou de integral, nem mesmo de quantidades infinitesimais.

Newton usa o argumento a seguir para provar que a área sob a curva de equação $y = x^n$, onde n é um inteiro positivo, é dada por

$$z = \frac{1}{n+1}x^{n+1}.$$

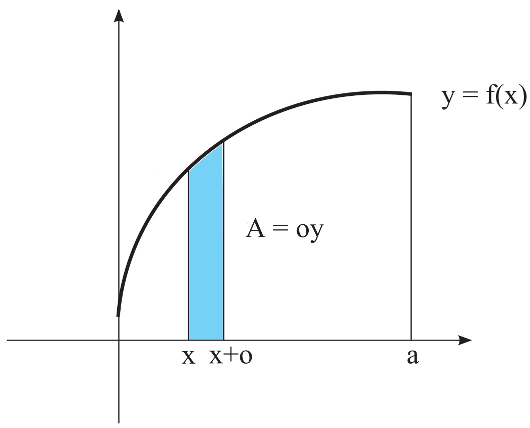


Figura 5.12

Considerando o incremento de x por um infinitesimal o, o valor da área passa a ser

$$z + oy = \frac{1}{n+1}(x+o)^{n+1}.$$

Desenvolvendo o lado direito pela expressão binomial, cancelando $y = x^n$ e dividindo por o, obtém

$$z + oy = \frac{1}{n+1}\left(x^{n+1} + (n+1)x^n o + \frac{(n+1)n}{2}x^{n-1}o^2 + \cdots\right).$$

Cancelando $z = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$, dividindo por o e eliminando os termos ainda contendo o, obtém finalmente

$$y = x^n.$$

De fato, Newton demonstrou o resultado acima em caráter mais geral, para n racional diferente de -1, usando para tanto seus resultados sobre a série binomial infinita. Este talvez seja o primeiro momento em que uma área foi obtida pelo inverso do que hoje conhecemos por derivação.

5.11.2 O método das fluxões

Em 1671, Newton escreveu *Methodus Fluxionum et Serierum Infinitorum* (Método das Fluxões e das Séries Infinitas), obra que introduziu seu método mais famoso, que seria publicada apenas em 1736. Nele, produziu avanços conceituais sobre o método dos infinitesimais, sem no entanto abandonar por completo essa noção. Passou a considerar as quantidades matemáticas como sendo de natureza contínua, comparando com o espaço descrito por um corpo em movimento. Esse corpo possuía velocidades, que eram chamadas de *fluxões*. Newton se valeu de um modelo mecânico e usou o tempo como variável universal. As funções da variável tempo eram chamadas por ele de *fluentes*. A fluxão — ou derivada, na linguagem moderna — do fluente $x = x(t)$ era denotada por $\dot{x}$, notação largamente empregada hoje no cálculo diferencial. Para Newton, o problema central do cálculo consistia no seguinte:

Dada a relação das quantidades fluentes, encontrar a relação entre suas fluxões, e reciprocamente.

O método de Newton aplicado a $y = x^n$ é descrito a seguir. Se o é um "intervalo de tempo infinitesimalmente pequeno", $\dot{x}o$ e $\dot{y}o$ são os crescimentos infinitesimalmente pequenos de x e de y. Substituindo $y + \dot{y}o$ e $x + \dot{x}o$ na relação (entre as quantidades fluentes) $y = x^n$ obtém:

$$\begin{aligned} y + \dot{y}o &= (x + \dot{x}o)^n \\ &= x^n + nx^{n-1}\dot{x}o + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\dot{x}^2o^2 + \cdots \end{aligned}$$

Cancelando $y = x^n$ e dividindo por o, tem-se

$$\dot{y} = nx^{n-1}\dot{x} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\dot{x}^2o + \cdots$$

Newton elimina todos os termos que contém o como fator para obter

$$\dot{y} = nx^{n-1}\dot{x}.$$

Newton não calcula a fluxão de uma quantidade, mas sim a razão entre duas fluxões. Esse procedimento retorna à ideia clássica de número, concebido como razão entre uma quantidade e outra do mesmo tipo tomada como unidade. Essa é a noção que aparece na teoria de proporções de Eudoxo e no livro V dos *Elementos* de Euclides.

5.11.3 O método das primeiras e últimas razões

Em sua obra *Tratactus de Quadratura Curvarum* (Tratado Sobre a Quadratura de Curvas), escrita em 1676 e publicada em 1704, Newton tentou libertar-se definitivamente das quantidades infinitesimalmente pequenas e colocar sua teoria em bases geométricas mais sólidas. Desenvolveu nessa obra seu terceiro método de cálculo infinitesimal, conhecido como *método das primeiras e últimas razões.*

Newton procede como no método de fluxões descrito acima, mas em vez de, ao final do processo, negligenciar as parcelas contendo o, Newton considera a razão entre as variações de x e de y para, em seguida, fazer com que o valha 0.

$$\begin{aligned}\frac{(x+\dot{x}o)-x}{(y+\dot{y}o)-y} &= \frac{\dot{x}o}{(x+\dot{x}o)^n - x^n} \\ &= \frac{\dot{x}o}{nx^{n-1}\dot{x}o + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\dot{x}^2o^2 + \cdots} \\ &= \frac{1}{nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\dot{x}o + \cdots}\end{aligned}$$

Fazendo o igual a zero, o resultado é uma razão igual a $1/nx^{n-1}$, o que Newton chama de "a última razão entre variações evanescentes".

O processo de Newton descrito acima equivale, de fato, ao cálculo da derivada

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Newton, em um cálculo como acima, não possuía a definição formal de limite, muito embora tenha revelado em seus *Principia* possuir uma noção de limite, como ilustra o texto seguinte:

As relações últimas nas quais certas quantidades desaparecem não são realmente relações de quantidades últimas, mas limites dos quais essas relações de quantidades, decrescendo sem limite, se aproximam sempre; e dos quais podem se aproximar tão perto quanto qualquer diferença dada [...]

5.12 Gottfried Leibniz

A contribuição de Leibniz ao cálculo diferencial, de caráter distinto da contribuição de Newton, foi também fundamental. Leibniz fez parte de uma missão diplomática em Paris em 1672, onde, influenciado por Christian Huygens, entrou em contato com a obra de diversos matemáticos, em especial com os trabalho de Blaise Pascal. Leibniz também esteve em Londres em 1673, onde conheceu a obra de Isaac Barrow e se tornou um membro da *Royal Society*. De volta à Alemanha, Leibniz se manteve bastante engajado em suas ocupações políticas. Dedicou-se, porém, à pesquisa matemática e, em 1676, já possuía resultados em cálculo infinitesimal similares aos que Newton obtivera anos antes. Leibniz escreveu seus resultados de forma fragmentada, em uma série de artigos publicados no periódico científico *Acta Eruditorum*, do qual foi cofundador. Muitos de seus resultados nunca foram publicados, tendo sido registrados somente em um diário pessoal, em forma de notas confusas e de difícil compreensão.

Figura 5.13: Retrato de Gottfried Leibniz. Pintura de c. 1700, de Christoph Bernhard Francke — *Herzog-Anton-Ulrich-Museum*, Braunschweig, Alemanha.

O cálculo de Leibniz se apoiava na noção de diferencial. A operação fundamental era o cálculo de diferenças — que equivale à derivada —, cuja operação inversa era a soma — que equivale à integral. Leibniz tinha noção da importância para o pensamento matemático de uma notação apropriada. Introduziu a notação dy para indicar a "menor diferença possível" — ou diferencial — entre valores vizinhos da variável y. Criou também a notação $\int$, um S de *summa* (soma) estilizado, de acordo com a qual $\int dy = y$. A notação, bastante conveniente, foi incorporada à matemática e é empregada nos dias de hoje. Leibniz chamava seu método para o cálculo de tangentes de *calculus diferentialis*, enquanto denominava o cálculo de áreas e volumes por *calculus summatorius* ou *integralis*. De sua terminologia nasceu o nome "cálculo diferencial e integral".

O primeiro artigo de Leibniz sobre o cálculo diferencial foi publicado em 1684 com o sugestivo título de *Um Novo Método para Máximos e Mínimos, e Também para Tangentes, que não é Obstruído por Quantidades Irracionais*. Leibniz percebeu que a busca da tangente a uma curva dependia das relações entre as ordenadas e as abscissas quando elas se tornam infinitesimalmente pequenas e que a quadratura dependia da soma de retângulos de bases infinitesimalmente pequenas apoiadas sobre o eixo das abscissas. O ponto de partida de Leibniz para o estudo do cálculo diferencial foi, mais uma vez, o *triângulo característico*.

Leibniz considera o triângulo infinitesimalmente pequeno ΔMRN como uma característica da curva (veja Figura 5.14). Seus três lados infinitesimalmente pequenos são determinados pela semelhança com o triângulo ΔTPM, cuja base é a subtangente TP e a altura, o valor da ordenada PM. Para Leibniz, mesmo considerando que dx e dy são quantidades infinitesimalmente pequenas, sua relação dy/dx é um valor finito determinado, igual à razão PM/TP no triângulo característico. Isso permite estabelecer uma relação entre diferenciais: se dx é uma quantidade qualquer, a diferencial dy é definida por

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{s},$$

onde y é o valor da ordenada e s é o valor da da subtangente.

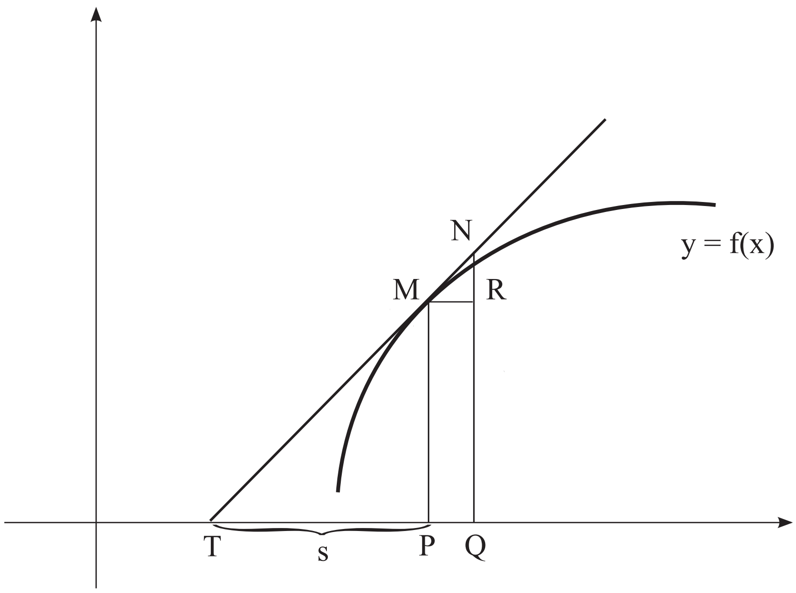


Figura 5.14

O método de Leibniz, descrito acima, pecava pela falta de uma definição rigorosa de tangente. Leibniz considerava, de forma imprecisa, como sendo tangente uma reta ligando pontos infinitesimalmente próximos. Ele também procurou dar uma justificativa para a existência das quantidades infinitesimalmente pequenas ao considerá-las apenas como instrumentos auxiliares em seus cálculos.

Leibniz introduziu regras para $d(x + y), d(xy), d(x/y)$ e dx^n, manifestando a intenção de produzir uma álgebra das quantidades infinitesimalmente pequenas. Fez esses cálculos eliminando infinitesimais de ordem maior que um. Por exemplo, considerando as menores diferenças possíveis dx e dy, a menor diferença possível associada a xy é obtida fazendo $(x + dx)(y + dy) - xy$, de onde, negligenciando

$dxdy$, obtêm-se $d(xy) = xdy + ydx$. A simplicidade e a elegância da notação e dos algoritmos tornaram o método de Leibniz bastante atraente, o que muito explica sua popularidade.

A paternidade em relação à criação do cálculo diferencial gerou uma das maiores disputas da história da matemática. Nos últimos anos do século XVII, diante do fato de que, na Europa continental, a criação do cálculo era atribuída a Leibniz, surgiram na Inglaterra alegações que este havia copiado suas ideias de Newton. Tais suspeitas, sustentadas inclusive por uma comissão de investigação da *Royal Society*, deixaram Leibniz amargurado pelo resto de sua vida. Pelos elementos que se tem hoje, as alegações de plágio parecem infundadas. A história da matemática reconhece que Newton foi o primeiro inventor do cálculo. No entanto, Leibniz desenvolveu seu método de forma independente e teve a primazia na divulgação de seus resultados, publicados décadas antes dos de Newton. Ademais, o método de Leibniz foi rapidamente aceito pelos matemáticos, sobretudo os da Europa continental, exercendo grande influência sobre o desenvolvimento posterior da matemática.

5.13 Exercícios

1. Analise as figuras da página 87. Tente identificar um ou mais pontos de fuga na pintura de Piero della Francesca. Comente por que a pintura de Giotto não se enquadra na técnica da perspectiva geométrica.

2. Considere a equação de quarto grau $x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0=0$. Mostre que, através de uma mudança de variáveis da forma $y = x + h$, ela é transformada em uma equação da forma $y^4 + b_2y^2 + b_1y + b_0 = 0$. Calcule o valor de h para que isso ocorra.

3. Mostre que, no método de Fermat para encontrar pontos de máximo e mínimo, a função $g(x)$ obtida é de fato a derivada da função polinomial $f(x)$. Proceda da seguinte maneira: demonstre o resultado, em primeiro lugar, para uma função da forma $f(x) = x^n$, onde $n \in \mathbb{N}$. Observe que, pela fórmula do binômio de Newton,

$$(x + E)^n = x^n + nEx^{n-1} + E^2h(x),$$

   onde $h(x)$ é um polinômio de grau $n - 2$ em x. O resultado geral segue por linearidade.

4. Mostre que o método de Fermat para encontrar tangentes a uma curva polinomial da forma $y = f(x)$ equivale ao método moderno, em que a inclinação da tangente é calculada por $m = f'(a)$. Efetue os cálculos propostos na página 97 para uma função da forma $f(x) = x^n$, onde $n \in \mathbb{N}$. Calcule o valor de d e da inclinação $m = a/d$.

5. Usando a notação e a técnica de Leibniz, calcule $d(x/y)$.

6. Encontre a tangente à curva $x^2 + y^2 = 25$ no ponto $(3, 4)$ usando os seguintes métodos:

   (a) o método de Fermat;

   (b) o método de Barrow;

   (c) o método de Leibniz.

6

Episódios dos séculos XVIII e XIX

AULA 6: EPISÓDIOS DOS SÉCULOS XVIII E XIX

OBJETIVOS

Ao terminar a leitura desse capítulo, o leitor deverá ser capaz de:

1. Compreender a evolução do cálculo diferencial no período subsequente à sua criação.
2. Entender os esforços empreendidos nos séculos XVIII e XIX em busca do rigor no cálculo.
3. Compreender a evolução da concepção de geometria no século XIX.

6.1 Introdução

O século XVIII assistiu a uma evolução filosófica, científica e cultural que o faria ser conhecido como o "Século das Luzes". Institui-se entre os pensadores a crença no poder da razão como fonte de transformação da sociedade. Ganharam espaço ideais democráticos e liberais, que culminariam, no final do século, nas Revoluções Americana e Francesa.

Também no século XVIII teve início um período de transformações econômicas que marcariam profundamente as sociedades ocidentais: a chamada Revolução Industrial. Em essência, ela consistiu na redefinição dos métodos de produção através da incorporação de avanços tecnológicos, acompanhada da intensificação do comércio e da evolução dos meios de transporte. Teve início na Inglaterra, espalhando-se, ao longo do século XIX, para outros países da Europa Ocidental. A Revolução Industrial proporcionou um aumento global da renda e um processo de urbanização acelerado, resultando no aparecimento de grandes cidades. Novas tecnologias e processos transformaram muitas áreas de produção. Em particular, a produção de papel e a indústria da impressão se beneficiaram de avanços técnicos que proporcionaram uma significativa redução do custo do material impresso, abrindo a possibilidade da massificação do acesso a livros e jornais. O triunfo da tecnologia aportado pela Revolução Industrial teve o efeito de valorizar a matemática como ferramenta, colocando essa disciplina em destaque, com consequências para seu ensino e sua pesquisa.

No século XVIII os governos começaram a atuar sistematicamente no fomento da ciência, ocupando o lugar dos mecenas, ativos nos séculos anteriores. A comunidade científica tomou iniciativas para se organizar através da criação de academias. No século XVII, já haviam sido criadas a *Royal Society* (1662), em Londres, e a *Académie des Sciences* (1666), em Paris. Em 1700 a Academia de Berlim foi criada por Leibniz. Em 1724, como parte de seus esforços de modernização e ocidentalização da Rússia, o czar Pedro, o Grande (1672-1725), fundou a Academia de São Petersburgo. As academias de ciências, que se multiplicaram nos séculos XVIII e XIX, passaram a ter um papel ativo na vida científica, estimulando a colaboração e a divulgação de novas ideias e teorias. Revistas e jornais científicos foram criados, assumindo o lugar de principais veículos de divulgação das ideias matemáticas. Antes de 1700, apenas 17 periódicos publicavam artigos de matemática, número que subiu para 210 no século XVIII e para 950 no século XIX. No século XIX surgiram revistas dedicadas exclusivamente à matemática. A mais célebre delas foi o *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, fundado em 1826 por August Leopold Crelle (1780-1855), em Berlim. Na França, merece destaque o *Journal de mathématiques pures et appliquées*, fundado em 1836 por Joseph Liouville (1809-1882). Ambos, publicados até os dias de hoje, mantêm seu lugar entre os periódicos matemáticos de maior prestígio. Na segunda metade do século XIX várias sociedades de matemática, nacionais e locais, foram fundadas, tais como a *London Mathematical Society* (1865) e a *Société Mathématique de France* (1872). Elas também passaram a publicar suas próprias revistas de matemática.

A Revolução Francesa promoveu diversas transformações de sentido democrático. Dentre elas, houve uma reforma do ensino secundário, quebrando o monopólio da Igreja e instituindo uma rede de liceus espalhados pelo país, subordinados a um Ministério da Educação central. Paralelamente, os programas estudados evoluíram, aumentando o espaço para estudo das ciências. No que concerne à ciência de ponta, os revolucionários franceses criaram, em 1794, a *École Polytechnique*. Contando em seus quadros com as maiores mentes da matemática francesa, essa escola exerceu, em seu primeiro meio século de vida, um papel central na matemática. Seus professores deveriam combinar pesquisa científica com ensino. Assim, textos dos cursos ministrados na *Polytechnique*, de alto padrão e voltados para um corpo de alunos de nível elevado, foram sistematicamente publicados e se tornaram referências. A qualidade da vida científica proporcionada pela *Polytechnique* atraiu estudantes e professores estrangeiros, contribuindo para colocar, nas primeiras décadas do século XIX, a matemática francesa na vanguarda da Europa. Na França pós-revolucionária seriam ainda fundadas a *École Normale Supérieure*, em 1795, com a função de formar professores e, mais tarde, outras escolas específicas de ciências e engenharia.

O ideal iluminista do uso da razão como instrumento de transformação do mundo se materializou, no final do século XVIII, na criação do sistema métrico decimal. Um sistema de pesos e medidas simples e preciso, baseado em princípios de lógica e em fenômenos naturais, foi desenvolvido com a função de substituir os diversos sistemas então utilizados. Por determinação do governo pós-revolucionário francês, foi instituída na *Académie des sciences*, em 1790, uma comissão com o objetivo de criar um novo sistema de medidas. A comissão, da qual faziam parte matemáticos de destaque, encerrou seus trabalhos em 1799, propondo o sistema métrico decimal. O metro padrão foi tomado como a décima milhonésima parte da distância entre o Equador e o Polo Norte. No mesmo ano de 1799, o sistema métrico decimal foi oficialmente adotado na França, se tornando obrigatório em 1837.

Na Europa Ocidental do século XIX ocorreu um expressivo processo de expansão e de democratização do ensino universitário. As muitas vagas de professor de matemática criadas proporcionaram condições para a profissionalização da pesquisa. Nas universidades do século XIX surgiu ainda a ideia de liberdade acadêmica no

ENCYCLOPÉDIE,

OU

DICTIONNAIRE RAISONNÉ DES SCIENCES, DES ARTS ET DES MÉTIERS,

PAR UNE SOCIÉTÉ DE GENS DE LETTRES.

Mis en ordre & publié par M. *DIDEROT*, de l'Académie Royale des Sciences & des Belles-Lettres de Pruſſe ; & quant à la PARTIE MATHÉMATIQUE, par M. *D'ALEMBERT*, de l'Académie Royale des Sciences de Paris, de celle de Pruſſe, & de la Société Royale de Londres.

Tantùm ſeries juncturaque pollet,
Tantùm de medio ſumptis accedit honoris ! HORAT.

TOME PREMIER.

A PARIS,

Chez
BRIASSON, *rue Saint Jacques, à la Science.*
DAVID l'aîné, *rue Saint Jacques, à la Plume d'or.*
LE BRETON, Imprimeur ordinaire du Roy, *rue de la Harpe.*
DURAND, *rue Saint Jacques, à Saint Landry, & au Griffon.*

M. DCC. LI.

AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROY.

Figura 6.1: Folha de rosto do primeiro tomo da *Encyclopédie*, publicada em 1751.

ensino, dando a cada professor o direito de lecionar temas de seu desejo, inclusive o objeto de sua própria pesquisa. As universidades se transformaram nos centros vivos da produção matemática. Isso foi nítido sobretudo na Alemanha que, na segunda metade do século XIX, assumiu o lugar da França como epicentro da produção matemática, distribuída por seus importantes centros universitários, com destaque para a Universidade de Göttingen.

No século XIX, a matemática, pela primeira vez, ganhou autonomia em relação às motivações trazidas pela mecânica e pela física: questões geradas internamente passam a ser sua principal força motriz. Um volume enorme de resultados foi produzido ao mesmo tempo em que houve um esforço continuado em busca do rigor. A par de disciplinas que acompanharam sua história, como geometria e álgebra, novas teorias surgiram e ganharam corpo, tais como a análise, nascida como uma evolução do cálculo, e a topologia, evolução da geometria. No século XIX a matemática evoluiu na direção de uma especialização que seria sua marca no século XX.

Nos séculos XVIII e XIX a produção matemática cresceu de forma acelerada, tanto em volume quanto em profundidade. Abordar esse período com um nível maior de detalhes ultrapassa os objetivos e as possibilidade desse livro. Assim, nas seções seguintes nos limitaremos a dar um panorama muito geral da matemática desenvolvida nestes dois séculos, dando destaque a alguns nomes e episódios marcantes.

6.2 Os irmãos Bernoulli

O cálculo infinitesimal nasceu no final do século XVII através dos trabalhos de Newton (médodo das fluxões) e de Leibniz (cálculo diferencial). Newton não tinha muita afeição por publicar e divulgar seus resultados, o que fez com que seu método de fluxões tivesse pouco destaque fora da Inglaterra. A escola de matemáticos ingleses que deu prosseguimento à concepção de Newton trabalhou com o objetivo de tentar esclarecer as noções fundamentais do método das fluxões, especialmente no sentido de tornar menos ambígua noção de infinitesimal.

Ao contrário de Newton, Leibniz fez um intenso trabalho de divulgação de seu método. Sua concepção de cálculo diferencial difundiu-se rapidamente, sobretudo graças à intensa correspondência de Leibniz com seus contemporâneos. Dentre os correspondentes e colaboradores de Leibniz, os mais destacados foram os irmãos suíços Jacques (1654-1705) e Jean (1667-1748) Bernoulli, estabelecidos na cidade de Basel. Os irmãos Bernoulli tiveram um papel fundamental na evolução e consolidação da teoria, desenvolvendo métodos, aplicações e notações.

Jacques, a princípio, estudou teologia, enquanto Jean estudou medicina. Ambos se envolveram com o estudo de matemática após tomarem conhecimento dos trabalhos de Leibniz. Em 1687, Jacques assumiu a cadeira de matemática na Universidade de Basel e, em 1695, Jean se tornou professor na Universidade de Groningen na Holanda. Após a morte de Jacques em 1705, Jean assumiu seu posto em Basel. Jean, doze anos mais novo que o irmão, viveria até os oitenta anos de idade.

Os irmão Bernoulli foram responsáveis pelo desenvolvimento de grande parcela do conteúdo hoje presente nos livro de cálculo. De fato, Jean Bernoulli esteve por trás daquele que é considerado o primeiro livro de cálculo. Em troca de um salário regular, Jean Bernoulli forneceu ao francês Marquês de L'Hôpital (c. 1661-1704) informações sobre suas descobertas matemáticas, concedendo a este o direito de usá-las como lhe conviesse. L'Hôpital escreveu, baseado no material fornecido por Jean Bernoulli, o livro *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes* (Análise dos infinitamente pequenos para a compreensão de linhas curvas), publicado em 1696. Esse texto, a primeira exposição sistemática da teoria do cálculo diferencial, teve um papel importante na popularização dos métodos de Leibniz. A regra de L'Hôpital, conhecida dos estudantes de cálculo e divulgada em seu livro, é, na verdade, criação de Jean Bernoulli.

Jacques Bernoulli encontrou a equação da isócrona, a curva plana ao longo da qual um objeto cai com velocidade uniforme. Ao publicar o trabalho no *Acta Eruditorum* em 1690, introduziu a palavra "integral". Leibniz passou a usar o termo *calculus integralis* no lugar de *calculus summatorius* para o inverso do *calculus differentialis*. A matematização da física com o progressivo emprego de técnicas de cálculo diferencial e integral deu origem à teoria de equações diferenciais, tema ao qual se dedicou Jacques Bernoulli. Este estudou equações diferenciais da forma $y' + P(x) = Q(x)y$, hoje conhecidas como "equações de Bernoulli", resolvida por uma mudança de variáveis $z = x^{1-n}$ e transformada em uma equação linear. É devido a Jacques Bernoulli o uso de coordenadas polares, o estudo da catenária (a curva descrita por uma corda apoiada em suas extremidades sob o efeito de seu próprio peso). Realizou ainda estudos em teoria de probabilidades.

Os trabalhos de Jean Bernoulli tiveram fortes ligações com os do irmão mais velho, sendo muitas vezes difícil distinguir os trabalhos dos dois. A relação profissional dos dois foi marcada pela colaboração, mas também por muita rivalidade.

O misto de colaboração e rivalidade dos irmão Bernoulli esteve presente na solução do problema da braquistócrona, que pode ser enunciado da seguinte maneira: dados dois pontos A e B, sendo A situado acima de B, encontrar a trajetória entre esses dois pontos que minimiza o tempo de percurso de um objeto que, partindo do repouso, se move sob efeito da gravidade constante e sem atrito. Jean Bernoulli propôs que essa curva fosse uma cicloide (a curva descrita por um ponto sobre um círculo que rola sobre uma reta) e deu uma demonstração incorreta. Desafiado pelo irmão, Jacques Bernoulli apresentou uma demonstração correta de que, de fato, a cicloide era a curva procurada. Esse problema estimulou o desenvolvimento de técnicas, mais tarde aprimoradas por Leonhard Euler, que resultaram em um área conhecida como *cálculo de variações*. Essencialmente, no cálculo de variações, o objetivo é a otimização de funcionais, em contraste com o cálculo diferencial, em que os objetos maximizados são funções. Um exemplo simples é a determinação da relação funcional $y = f(x)$ que minimiza ou maximiza uma certa integral $\int_a^b g(x,y)dx$.

O estudo de curvas e superfícies sob o ponto de vista do cálculo deu origem à geometria diferencial. Jean Bernoulli contribuiu nesse domínio com seus estudos sobre geodésicas em superfícies (curvas que minimizam a distância entre dois pontos).

6.3 Leonhard Euler

Figura 6.2: Leonhard Euler, pintura de 1753 — *Kunstmuseum Basel*, Suiça

Da cidade suíça de Basel também veio aquele que foi a maior mente matemática do século XVIII, um dos gênios que mais influenciaram os rumos tomados pela matemática moderna: Leonhard Euler (1707-1783). Euler estudou na Universidade de Basel, onde foi aluno de Jean Bernoulli, que desde cedo reconheceu o talento de seu pupilo para a matemática e investiu em sua formação. Em 1727 Euler se transferiu para São Petersburgo, capital russa, onde assumiu um posto na Academia de Ciências Imperial. Em 1741, a convite de Frederico da Prússia, aceitou um emprego na Academia de Berlim. Viveu e trabalhou em Berlim até 1766, quando voltou para São Petersburgo. Euler foi considerado o matemático mais produtivo de seu tempo e, possivelmente, foi o mais prolífico matemático da história. Em sua vida, publicou 560 livros e artigos, número que se aproxima de 800 quando também contabilizados os manuscritos publicados após sua morte. Em 1766 ficou completamente cego, mas manteve o ritmo de sua produção matemática até o final de sua vida, confiando em sua memória e ditando seus trabalhos para um assistente.

Euler deu contribuições originais em todos os campos da matemática conhecidos em sua época. Além disso, escreveu livros que estruturaram diversas teorias, construídas a partir de resultados que se achavam dispersos e desordenados. Seus livros tiveram muito prestígio e acabaram por estabelecer uma grande parcela das notações e da terminologia hoje usadas na álgebra, na geometria e na análise.

Euler foi responsável pela introdução de diversos símbolos empregados na escrita matemática. A letra "e" para "o número cujo logaritmo hiperbólico vale 1" foi introduzida por Euler, possivelmente tendo como referência a primeira letra da palavra exponencial. Embora não tenha sido criação sua, o símbolo π, denotando a razão entre a circunferência e o diâmetro do círculo, passou a ter uso generalizado após ser sistematicamente empregado por Euler. A introdução do símbolo i para $\sqrt{-1}$ e das notações sin.v, cos.v, tang.v, cosec.v, sec.v, cot.v para as funções trigonométricas também é devida a Euler. Em geometria, Euler estabeleceu a convenção de se usar letras minúsculas a, b e c para os lados de um triângulo e letras maiúsculas A, B e C para os ângulos opostos. Em textos sobre teoria de probabilidades, introduziu a notação $\left[\frac{p}{q}\right]$ para o que hoje denotamos por $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.

Em sua obra *Introductio in analisin infinitorum* (Introdução à análise do infinito), de 1748, Euler estudou séries infinitas, tais como as de e^x, sen$x$ e cos$x$, e apresentou a famosa relação $e^{ix} = \cos x + i\,\mathrm{sen}\, x$. Estudou curvas e superfícies a partir de suas equações, o que faz com que esse seja considerado o primeiro livro de geometria analítica. Seu aspecto mais relevante, no entanto, é o fato de ser o primeiro texto em que a noção de função aparece como elemento central da análise matemática. Euler definiu função de uma quantidade variável como "uma expressão analítica composta de alguma maneira da quantidade variável e de números ou de quantidades constantes". Ou seja, para Euler, uma função era uma expressão obtida a partir das operações básicas conhecidas em seu tempo: polinomiais, exponenciais, logarítmicas, trigonométricas e trigonométricas inversas. A definição de Euler, a par de ser imprecisa à luz da matemática moderna, englobava um universo limitado de funções. Euler procurou caracterizar as funções categorizando-as, de acordo com o modo como eram geradas, entre algébricas e transcendentes, uniformes e multiformes, explícitas e implícitas. A notação $f(x)$ para uma função de x também foi introduzida por Euler.

Em seu livro *Institutiones calculi differentialis* (Fundamentos do cálculo diferencial), de 1755, e nos três volumes de *Institutiones calculi integralis* (Fundamentos do cálculo integral), publicados entre 1768 e 1774, além de apresentar um tratamento mais exaustivo da teoria do cálculo, Euler desenvolveu a teoria de equações diferenciais. É devida a Euler a distinção entre equações "lineares", "exatas" e "homogêneas", adotadas hoje nos cursos elementares de equações diferenciais. Euler foi o maior responsável pelos métodos de solução estudados nesses cursos: o uso de fatores integrantes, o método de solução de equações lineares, a distinção entre equações lineares homogêneas e não homogêneas, as noções de solução particular e de solução geral.

Os trabalhos de Euler na área de teoria de números foram significativos. Como já foi dito, demonstrou o Pequeno Teorema de Fermat e mostrou sua capacidade de computação provando que $F_5 = 2^{2^5} = 4.294.967.297$ não é primo. Euler contribuiu para demonstração do Último Teorema de Fermat ao provar que, para $n = 3$, inexiste solução inteira para a equação $x^n + y^n = z^n$.

6.4 França, período revolucionário

6.4.1 D'Alembert

O matemático francês Jean Le Rond d'Alembert (1717-1783) foi um dos mais importantes cientistas da França do século XVIII. Foi coeditor, ao lado de Denis Diderot (1713-1784), da *Encyclopédie ou dictionnaire raisoné des sciences, des arts et des métiers* (Enciclopédia ou dicionário sistemático das ciências, das artes e dos ofícios), editada entre 1751 e 1772. A *Encyclopédie* — grande projeto de compilação, organização e síntese dos conhecimentos e das ideias dos pensadores do Século das Luzes — teve d'Alembert como responsável por muitos dos artigos sobre ciência e matemática.

D'Alembert trabalhou com a concepção de limite. Rejeitou a ideia atomista da existência de quantidades infinitamente pequenas estáticas: para ele, uma quantidade era nula ou não nula, não existindo uma situação intermediária. D'Alembert concebia uma diferencial (fluxão, na linguagem de Newton, ou quantidade infinitamente pequena, para Leibniz), como uma "quantidade menor que toda grandeza determinada", considerada como "a diferença infinitamente pequena de duas grandezas finitas, em que uma ultrapassa a outra infinitamente pouco". Para ele, o cálculo diferencial era a "maneira de diferenciar as quantidades, ou seja, de encontrar a diferença infinitamente pequena de uma quantidade finita variável".

Para d'Alembert, "a noção de limite é a base e a verdadeira metafísica do cálculo diferencial". No verbete "Limite" da *Encyclopédie*, ele apresentou a seguinte definição:

"Dizemos que uma grandeza é o limite de uma outra grandeza, quando a segunda pode se aproximar da primeira mais perto que uma grandeza dada, tão pequena quanto podemos supor, sem no entanto que a grandeza que aproxima possa ultrapassar aquela da qual ela se aproxima; de forma que a diferença de uma tal quantidade e seu limite seja absolutamente indeterminável."

"Por exemplo, suponhamos dois polígonos, um inscrito e o outro circunscrito a um círculo, é evidente que podemos multiplicar os lados tantas vezes quando queiramos; e, neste caso, cada polígono aproximará progressivamente da circunferência do círculo, o contorno do polígono inscrito aumentará, e aquele do circunscrito diminuirá. Mas o perímetro ou o contorno do primeiro não ultrapassará nunca o comprimento da circunferência, e aquele do segundo nunca será menor que esta mesma circunferência; a circunferência do círculo é portanto o limite do aumento do primeiro polígono e da diminuição do segundo."

Além de seu trabalho como enciclopedista, d'Alembert foi também um matemático atuante. Procurou dar uma demonstração, sem sucesso, do Teorema Fundamental da Álgebra: todo polinômio não constante $p(x)$ com coeficientes complexos possui pelo menos uma raiz complexa. Em um trabalho sobre resistência de fluidos, obteve as relações hoje conhecidas como equações de Cauchy-Riemann, que estão no alicerce da teoria de funções de variáveis complexas. D'Alembert produziu ainda trabalhos sobre equações diferenciais. Seus estudos sobre as vibrações de uma corda o levaram à equação diferencial $\partial^2 u/\partial t^2 = k^2 \partial^2 u/\partial x^2$, fato que o faz ser considerado como um dos fundadores da teoria das equações diferenciais parciais.

6.4.2 Lagrange

Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) nasceu e foi educado em Turim, na Itália. Trabalhou inicialmente em sua cidade natal, porém, em 1766, com a ida de Euler de Berlim para São Petersburgo, foi indicado por este e por d'Alembert para assumir um posto na Academia de Berlim. Foi então convidado pelo rei Frederico, o Grande, da Prússia, que expressou a Lagrange o desejo de "o maior rei da Europa" ter em sua corte o "maior matemático da Europa". Lagrange viveu em Berlim até 1786, ano da morte de Frederico. Seguiu então para Paris, onde, no período da Revolução Francesa, trabalhou na reformulação do sistema de pesos e medidas. Lagrange foi professor nas recém criadas *École Normale*, em 1795, e *École Polytechnique*, em 1797, trabalhando ativamente na produção de textos de cursos para os novos programas dessas escolas.

Um clássico escrito por Lagrange foi *Théorie des fonctions analytiques* (Teoria das funções analíticas), publicado em 1797. Nessa obra, ele apresentou sua visão de que as operações do cálculo diferencial e integral poderiam ser efetuadas através de manipulações algébricas nas expansões em série de potências das funções estudadas. Lagrange produziu assim as chamadas *funções derivadas*, de onde vem a terminologia *derivada* empregada atualmente. Também provêm de Lagrange as notações $f'(x), f''(x), \ldots, f^{(n)}(x)$ para as derivadas da função $f(x)$. A função derivada $f^{(n)}(x)$ era calculada por Lagrange como $n!$ multiplicado pelo coeficiente de h^n da expansão em série de Taylor de $f(x+h)$. Através desse procedimento, buscava eliminar o uso de limites ou de infinitesimais. O método de Lagrange é falho, evidentemente, pois nem todas as funções possuem desenvolvimento em série de potências. Além do mais, as propriedades de convergência necessárias para o tratamento de séries necessitam da noção de limite.

Lagrange desenvolveu o cálculo de variações, apresentando para ele uma formulação analítica. Em álgebra, analisou questões sobre a solubilidade de equações polinomiais em termos de permutações de suas raízes, tentando entender por que os métodos empregados para polinômios de grau $n \leq 4$ não funcionavam em grau $n > 4$. Esse trabalho levaria à teoria de grupos e às provas de Niels Henrik Abel (1802-1829) e de Évariste Galois (1811-1832) sobre a insolubilidade de equações de grau maior que quatro, resultado este conjecturado por Lagrange.

Lagrange produziu a célebre obra *Mécanique analytique* (Mecânica analítica), publicada em 1788, em que aplicou à mecânica as técnicas de análise recentemente desenvolvidas. Sua apresentação contrapôs à abordagem geométrica de Newton. No prefácio escreveu: "Não serão encontradas figuras nesta obra, somente operações algébricas".

Duas contribuições de Lagrange são hoje estudadas nos cursos elementares de cálculo:

• O método de variação de parâmetros para equações diferenciais lineares não homogêneas: se $c_1u_1 + c_2u_2$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, é a solução geral da equação linear homogênea $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, então uma solução para e equação não homogênea $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$ pode ser obtida na forma $v_1u_1 + v_2u_2$, onde v_1 e v_2 são funções a serem determinadas.

• O método dos multiplicadores de Lagrange, usado para encontrar extremos da função $f(x, y, z)$ sujeita à condição $g(x, y, z) = 0$. Para isso, produz-se a função $F = f + \lambda g$, onde $\lambda \in \mathbb{R}$ é o chamado multiplicador de Lagrange, resolvendo-se em seguida o sistema de equações $F_x = 0$, $F_y = 0$, $F_z = 0$, $g = 0$.

6.4.3 Cauchy

Figura 6.3: Cauchy, em torno de 1840.
Litografia de Zéphirin Belliard baseada
em pintura de Jean Roller
— *Library of Congress Prints and Photographs Division*.

O parisiense Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), um dos matemáticos mais destacados do início do século XIX, foi um dos precursores da análise matemática, tendo sido responsável por formular e demonstrar de maneira rigorosa resultados do cálculo infinitesimal e pelo desenvolvimento da teoria de funções complexas.

Cauchy estudou na *École Polytechnique* e, em seguida, na *École des ponts et Chaussés*, prestigiosa escola de engenharia onde se formou em engenharia civil. Iniciou sua vida profissional trabalhando na construção de uma base naval na cidade de Chergourg. Em 1812, de volta a Paris após uma doença, Cauchy decidiu abandonar a carreira de engenharia para se dedicar à matemática. Em 1815 se tornou professor da École Polytechnique, a princípio com um emprego temporário, obtendo um posto permanente em 1816.

Em 1814, Cauchy apresentou à Academia Francesa um trabalho que continha os germes de sua teoria de variáveis complexas ou variáveis "imaginárias", conforme a terminologia da época. A representação gráfica de uma função $w = f(z)$, onde w e z são variáveis complexas, ao necessitar de quatro dimensões reais, impossibilitava o recurso à visualização geométrica. Assim, Cauchy tinha noção de que um nível maior de abstração seria necessário para lidar com funções complexas, o que significaria também uma dose maior de rigor, direção na qual seu trabalho caminhou.

O trabalho como professor na *École Polytechnique* envolvia também a produção de textos didáticos. Cauchy publicou, entre 1821 e 1829, três livros que deram ao cálculo diferencial as características que tem hoje. Cauchy fez da concepção de limite de d'Alembert um elemento central no cálculo. Para essa noção, deu uma definição mais precisa:

[...] *quando valores sucessivamente atribuídos a uma mesma variável se aproximam infinitamente de um valor fixo, de maneira a diferir deste por tão pouco quando se queira, este último é chamado limite de todos os outros.*

Cauchy apresentou também uma definição mais satisfatória de função contínua, em que faz uso do símbolo i para um infinitesimal:

[...] *quando uma função $f(x)$ admitindo um valor único e finito para todos os valores de x compreendidos entre dois limites dados, a diferença $f(x+i) - f(x)$ é sempre entre esses limites uma quantidade indefinidamente pequena, dizemos que $f(x)$ é uma função contínua da variável x entre os limites em questão.*

Se, na definição de Cauchy, interpretarmos o termo "quantidade infinitamente pequena" como sendo o processo de tomar o limite, a definição se assemelha a que temos hoje.

Cauchy definiu derivada para uma função $y = f(x)$, ou, seguindo sua terminologia, a "razão última das diferenças infinitamente pequenas Δy e Δx". Considerando $\Delta x = i$, tomou os quocientes das diferenças

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+i) - f(x)}{i}$$

para, em seguida, calcular o limite quando Δx e Δy tendem a zero.

A integração era tratada nos primórdios do cálculo como uma operação inversa à diferenciação. Cauchy apresentou uma definição de integral de maneira independente. Definiu integral considerando somas do tipo

$$S_n = (x_1 - x_0)f(x_0) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \cdots + (x_n - x_{n-1})f(x_{n-1}),$$

onde $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ é a subdivisão do intervalo $[a, b]$ em n subintervalos, tomando em seguida o limite dessas somas quando os tamanhos dos intervalo $x_i - x_{i-1}$ diminuem infinitamente. A relação entre sua definição de integral e a antiderivada foi por ele demonstrada fazendo uso do Teorema do Valor Médio. A definição de Cauchy permitiu as generalizações modernas da noção de integral.

Como parte dos esforços no sentido de dar mais rigor ao cálculo, Cauchy chamou a atenção para a necessidade de observar a convergência de séries, algo negligenciado por seus antecessores. Definiu convergência nos seguintes termos:

"Consideremos a série

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ u_3,\ \text{etc.},$$

composta de termos quaisquer reais ou imaginários. Para que esta série seja convergente, será necessário e suficiente que os valores crescentes de n façam convergir indefinidamente a soma

$$s_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

para um limite fixo s. Em outros termos, será necessário e suficiente que, quando o número n se torna infinito, as somas

$$s_n,\ s_{n+1},\ s_{n+2},\ \text{etc.}$$

difiram indefinidamente pouco do limite s e, por consequência, umas das outras."

Em sua última linha, a definição chama a atenção para a propriedade que hoje é conhecida *critério de Cauchy* de convergência: para todo p, a diferença entre s_n e s_{n+p} tende a zero quando n cresce.

Cauchy é considerado o precursor do estudo das funções de variáveis complexas. D'Alembert já havia estudado essas funções em seus trabalhos sobre resistência de fluidos, onde obteve as relações que hoje são conhecidas como equações de Cauchy-Riemann. Porém, ao estabelecer novos conceitos e ferramentas, Cauchy transformou o estudo de funções de variáveis complexas em uma área com vida própria. No estudo *Mémoire sur les intégrales définies, prises entres des limites imaginaires* (Memória sobre as integrais definidas, tomadas entre dois limites imaginários), de 1825, apareceu a fórmula integral com resíduos. Em um trabalho posterior, de 1831, provou que uma função analítica de uma variável complexa $w = f(z)$ tem desenvolvimento em série de potências no ponto $z = z_0$, convergente em um disco centrado em z_0. Cauchy publicou diversos trabalhos sobre funções complexas. Sua teoria foi amplamente aceita pela comunidade matemática de seu tempo e se transformou em uma área matemática de intensa atividade.

6.5 Gauss

Carl Friedrich Gauss (1777-1855) demonstrou desde cedo uma enorme capacidade matemática. Conta-se a história de que, quando criança, seu professor, para manter a turma ocupada, pediu aos alunos que somassem todos os números de 1 a 100. Gauss, sem fazer maiores cálculos, imediatamente apresentou o resultado correto, possivelmente usando a expressão $n(n+1)/2$ para a soma dos n primeiros números naturais. O talento do jovem estudante chamou a atenção do Duque de Braunschweig, sua cidade natal, que custeou sua educação. Em 1795, Gauss iniciou seus estudos na Universidade de Göttingen. No ano seguinte, aos 18 anos de idade, demonstrou que o polígono regular de 17 lados poderia ser construído com régua e compasso. Até então, os únicos polígonos com número de lados primo construídos eram o triângulo e o pentágono regulares. Este é apenas um exemplo dos muitos resultados que Gauss obteve em seu tempo de estudante.

Gauss concluiu seu doutorado em 1799. Na sua tese forneceu uma demonstração para o Teorema Fundamental da Álgebra: todo polinômio não constante com coeficientes complexos possui pelo menos uma raiz complexa. Erros nas tentativas de demonstração deste teorema por d'Alembert foram apontados por Gauss. A demonstração contida em sua tese foi uma das quatro demonstrações para o Teorema Fundamental da Álgebra que ele daria ao longo de sua vida.

Gauss publicou a obra *Disquisitiones arithmeticae* (Investigações aritméticas) em 1801, ainda no início de sua carreira matemática. Trata-se de um texto sobre teoria dos números que se transformou num clássico da literatura matemática. Esse texto é considerado o marco inicial da moderna teoria de números. Nele, compilou o trabalho de seus predecessores e deu à área uma vida nova, desenvolvendo as teoria de congruências quadráticas, formas e resíduos.

Gauss ganhou fama quando, aos 23 anos de idade, computou a órbita do planetoide de Ceres. Descoberto em 1801 pelo astrônomo italiano Giuseppe Piazzi, esse corpo celeste teve sua órbita perdida em poucas semanas. A partir de poucos dados observacionais, Gauss desenvolveu um procedimento matemático que previu a órbita do planetoide. Conhecido como *método de Gauss*, ele envolvia a solução de uma equação de grau oito. Esse método ainda hoje é usado para rastrear satélites. O reconhecimento pelos trabalhos de Gauss em astronomia levou-o a ser designado, em 1807, diretor do observatório de Göttingen.

Desde o nascimento do cálculo diferencial e integral, os métodos dessa teoria foram usados para o estudo de curvas e superfícies. Gauss, em sua obra *Disquisitiones circa superficies curvas* (Investigações sobre superfícies curvas), de 1827, inovou o estudo da geometria de superfícies ao usar métodos analíticos para explorar suas propriedades locais. O texto de Gauss foi marcante no desenvolvimento da geometria diferencial, apontando direções para o avanço da teoria. Nele, Gauss inovou ao estudar superfícies partindo de suas equações paramétricas.

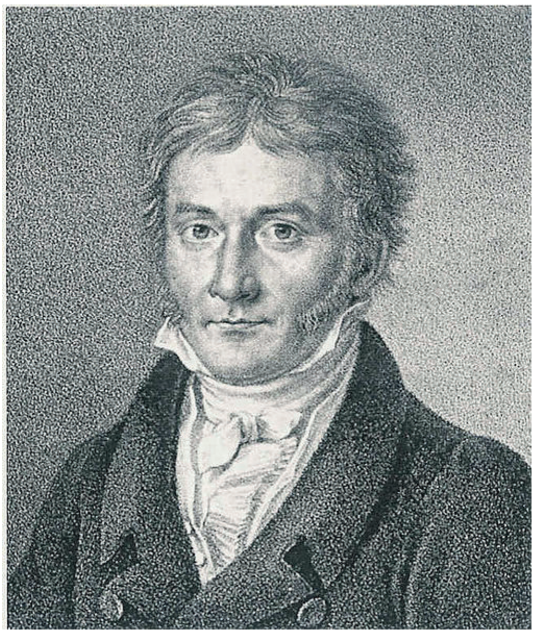


Figura 6.4: Gauss, litografia publicada na *Astronomische Nachrichten* em 1828.

Gauss definiu o invariante hoje conhecido como *curvatura gaussiana* da seguinte forma. Em um ponto p de uma superfície S, toma-se o feixe de planos contendo a direção normal N. Cada um desses planos intercepta a superfície em uma curva que possui um certo raio de curvatura. As direções correspondentes ao maior e ao menor raio de curvatura são chamadas de *principais*. Gauss demonstrou que elas são perpendiculares entre si. Denotando os raios de curvatura correspondentes por R e r, a curvatura Gaussiana de S em p é então definida por $K = 1/rR$. Gauss forneceu fórmulas para o cálculo de K em termos das derivadas parciais da parametrização da superfície.

A partir da parametrização da superfície, Gauss estudou suas propriedades métricas. Expressou a diferencial ds^2 do comprimento de arco como uma forma diferencial quadrática

$$ds^2 = Edu^2 + Fdudv + Gdv^2,$$

onde u e v são os parâmetros. Por fim, no *Theorema egregium* demonstrou que a curvatura total da superfície depende apenas das expressões E, F e G.

Um tratado publicado por Gauss em 1831 teve importância histórica por apresentar a representação geométrica dos números complexos, estabelecendo a correspondência entre o número $z = x + iy$ e o ponto do plano cartesiano de coordenadas (x, y). Uma representação geométrica similar dos números complexos já havia sido obtida, em 1797, pelo norueguês Caspar Wessel (1745-1818). No entanto, foi o trabalho de Gauss que a popularizou dentro da comunidade matemática, tanto que o plano dos números complexos é hoje conhecido como *plano Gaussiano*. O termo "número complexo" também foi proposto por Gauss, em substituição à terminologia "número imaginário", que ajudava a nutrir dúvidas sobre a existência desses objetos. Gauss contribuiu expressivamente para a estruturação da teoria dos números complexos, propondo diversas aplicações à álgebra e à aritmética. Por exemplo, criou uma nova teoria de números primos, dentro da qual $5 = (1 + 2i)(1 - 2i)$ não mais era considerado primo.

Foram também significativos os trabalhos de Gauss em física. Realizou trabalhos experimentais em magnetismo e propôs contribuições sobre a teoria de forças inversamente proporcionais ao quadrado da distância, dando início à teoria do potencial. Nos últimos anos de sua vida, muitas de suas publicações estiveram vinculadas ao seu trabalho no observatório astronômico. Nesse período, desenvolveu estudos dentro do que hoje é considerada matemática aplicada.

Gauss, além de trabalhador incansável, era um perfeccionista, que só se permitia publicar trabalhos sobre teorias devidamente acabadas. Muitas de suas descobertas permaneceram em um diário pessoal e não foram publicadas. Um exemplo disso são seus estudos sobre geometrias não-euclidianas. Em seus anos de estudante em Göttingen, Gauss fez tentativas de demonstrar o postulado da paralelas, chegando à conclusão de que não era possível uma prova. As conclusões não publicadas de Gauss o tornariam inventor das geometrias não-euclidianas.

6.6 A evolução da geometria

A reorganização do ensino francês durante o período revolucionário teve a participação de diversos cientistas de destaque. Dentre eles esteve o matemático Gaspard Monge (1746-1818), criador da geometria descritiva, disciplina inspirada nas técnicas gráficas dos desenhistas práticos. Monge produziu o texto *Géometrie Descriptive*, editado em 1799, baseado em notas tomadas de suas aulas na *École Normale*. Nele, destacou seus objetivos:

- representar com exatidão em desenhos bidimensionais objetos tridimensionais definidos rigorosamente;
- deduzir da descrição exata dos corpos as propriedades advindas de suas formas e de suas posições respectivas.

A teoria de Monge buscava oferecer procedimentos para aplicar a geometria à resolução problemas de natureza prática. Em seu método cada ponto do objeto tridimensional era inicialmente projetado em dois planos mutuamente perpendiculares. Um desses planos, em seguida, sofria uma rotação de um ângulo reto com eixo em sua reta de interseção (a chamada *linha de terra*), de forma que os dois planos iniciais passassem a formar um único plano.

Um aluno de Monge, Jean-Victor Poncelet (1788-1867), reviveu e renovou a geometria projetiva de Desargues. Oficial do exército de Napoleão, Poncelet desenvolveu suas ideias sobre geometria enquanto prisioneiro em um campo russo. Ele foi o primeiro matemático a tratar a geometria projetiva como um ramo autônomo da geometria, renunciando ao uso de coordenadas e às técnicas de geometria analítica. Poncelet desenvolveu um método geral, em que distinguiu as propriedades métricas — ligadas às noções de distância e de ângulo — das propriedades descritivas — invariantes por projeção. No último grupo estavam, por exemplo, os resultados contidos nos teoremas de Desargues e de Pascal. Nesses estudos, Poncelet ressaltou a importância das transformações geométricas. Seu texto *Traité des propriétés projectives des figures* (Tratado das propriedades projetivas de figuras), de 1822, onde são estabelecidos os princípios da geometria projetiva, teve uma influência marcante nos geômetras do século XIX.

O início do século XIX também assistiu à criação das geometrias não-euclidianas. Ao longo dos séculos, muitos matemáticos fizeram tentativas de demonstrar o quinto postulado de Euclides — o chamado postulado das paralelas — ou, ao menos, de substituí-lo por outro com formulação mais simples e intuitiva. No entanto, todas as tentativas de demonstração recaiam no uso de resultados equivalentes ao axioma de Euclides. No Capítulo 4 foram relatados os estudos dos árabes sobre o quinto postulado. Inspirado neles, no século XVIII, o padre jesuíta italiano Giovani Saccheri (1667-1733) partiu da hipótese do ângulo agudo no quadrilátero de Saccheri (veja a página 71) para obter uma série de teoremas. Saccheri esteve próximo de criar a geometria hiperbólica, mas rejeitou seus resultados por parecerem absurdos aos seus olhos. Mais tarde, o suíço Jean Henri Lambert (1728-1777), baseado nos trabalhos de Saccheri, não enxergou contradições na hipótese do ângulo agudo, mas viu diante de si um problema aberto. Lambert foi o primeiro a tratar como possível a construção de geometrias logicamente coerentes, tanto com a hipótese do ângulo agudo quanto com a hipótese do ângulo obtuso.

Gauss, desde seus tempos de estudante, se interessou pelo problema de postulado das paralelas. Por volta de 1813 teria construído uma geometria, segundo ele, "estranha e totalmente diferente da nossa". No entanto, como lhe era característico, não publicou sobre o assunto. Por outro lado, sua visão sobre a possibilidade de existência de geometrias diferentes da euclidiana apareceu em seus resultados sobre geometria diferencial de superfícies, onde ficou clara a possibilidade de dotar uma mesma superfície de diversas geometrias. Em seu *Disquisitiones Circa Superficies Curvas*, Gauss já havia desenvolvido a noção de geometria intrínseca a uma superfície, estudando suas propriedades geométricas de forma independente de seu espaço ambiente.

A comunidade matemática tomaria conhecimento das geometrias não-euclidianas apenas com os trabalhos do russo Nicolai Ivanovich Lobatchevski (1792-1856), professor na Universidade de Kazan, e do húngaro János Bolyai (1802-1860), oficial do exército do império austríaco. Eles são considerados coinventores da geometria não-euclidiana, teoria que elaboraram, de forma independente, por volta do ano de 1825. A concepção de geometria que desenvolveram e divulgaram, idêntica à desenvolvida por Gauss, receberia mais tarde de Felix Klein a denominação de *geometria hiperbólica*.

A visão, preponderante até o final do século XVIII, de que a geometria euclidiana fosse uma descrição fiel do mundo sensível — sendo, por isso, tratada como um dogma — foi questionada por Gauss, que reconheceu nas geometrias não-euclidianas o direito de representar o espaço físico. Segundo ele, caberia à experiência determinar a geometria melhor adaptada à realidade física, visão que seria avalizada pelos avanços da física no século XX. A criação das geometrias não-euclidianas marcou a própria essência da matemática, proporcionando a ela uma libertação do mundo físico a partir da aceitação de objetos coerentemente concebidos pela mente humana.

Figura 6.5: Riemann, imagem de 1863 — *Smithsonian Libraries*.

A obra de Gauss sobre geometria teve continuidade com um de seus mais brilhantes alunos: Bernhard Riemann (1826-1866). Adotando o ponto de vista da geometria diferencial, Riemann explorou as propriedades das geometrias não-euclidianas, colocando-as em um quadro mais geral. O trabalho de Riemann retomou e generalizou a ideia de Gauss sobre a geometria intrínseca das superfícies, criando uma teoria de geometria diferencial para dimensão qualquer, hoje conhecida como geometria Riemanniana. O elemento central de sua abordagem está na definição de uma forma quadrática ds^2, generalização do elemento linear ds de Gauss, usada para calcular distâncias. Riemann explorou a noção de curvatura, mostrando que a geometria euclidiana correspondia à curvatura nula, enquanto a geometria de Bolyai e Lobatchevski estava associada à curvatura negativa. Riemann mostrou ainda que, em dimensão dois, as superfícies de curvatura positiva podiam ser aplicadas sobre uma esfera, onde poderia ser desenvolvida uma geometria desprovida de retas paralelas.

O alemão Felix Klein (1849-1925), por ocasião de sua admissão na Universidade de Erlangen em 1872, propôs abordar as duas grandes correntes de estudo de geometria — a geometria métrica e a geometria projetiva — dentro de um mesmo princípio geral. A ideia de Klein era caracterizar as geometrias através do estudo de invariantes de grupos de transformações. Sua proposta ficou conhecida como *programa de Erlangen*.

O grande desenvolvimento da geometria no século XIX culminou, no final do século, com a axiomatização da geometria euclidiana empreendida por David Hilbert (1862-1943), professor da Universidade de Göttingen. Em sua obra *Grundlagen der Geometrie* (Fundamentos da geometria), de 1899, Hilbert propôs uma construção partindo de três elementos básicos — ponto, reta, plano — e de seis relações entre esses elementos — relações de "estar entre", de "estar contido" e de "ser congruente". A descrição dessas relações foi feita através de 21 axiomas, distribuídos em cinco grupos:

- 8 axiomas de conexão;
- 4 axiomas de ordem;
- 6 axiomas de congruência;
- axioma das paralelas (axioma de Euclides);
- 2 axiomas de continuidade.

Sobre a necessidade de abstrair os conceitos geométricos, conta-se que Hilbert certa vez dissera: "Temos sempre que ser capazes de substituir 'pontos, retas e planos' por 'mesas, cadeiras e canecas de cerveja' ". O trabalho de Hilbert, ao desconsiderar o apelo à intuição, abriu a possibilidade de definir axiomaticamente espaços abstratos, sem a obrigatoriedade de conexão com o mundo físico. A geometria redesenhou sua identidade, mantendo assim seu lugar como uma das áreas mais férteis da matemática.

6.7 A fundamentação do cálculo

No início do século XIX os matemáticos sentiam a necessidade de elucidar os conceitos básicos do cálculo e de assentar a teoria sobre fundamentos mais sólidos. Como exemplo, os pioneiros do cálculo operavam com diferenciais sem no entanto ter uma ideia precisa do que fossem esses objetos. Um passo a frente havia sido dado no século XVIII com os trabalhos de Euler e de Lagrange, que deram à noção de função o papel de destaque no cálculo. Porém, o próprio conceito de função não estava bem estabelecido, muito menos havia uma definição rigorosa de função contínua.

O padre tcheco Bernard Bolzano (1781-1848) foi o primeiro a se aventurar a esclarecer os conceitos fundamentais do cálculo. Publicou trabalhos sobre o assunto entre os anos de 1810 e 1817. Porém, tardaria ainda meio século para que suas ideias fossem reconhecidas pela comunidade matemática. Por isso, Cauchy, que

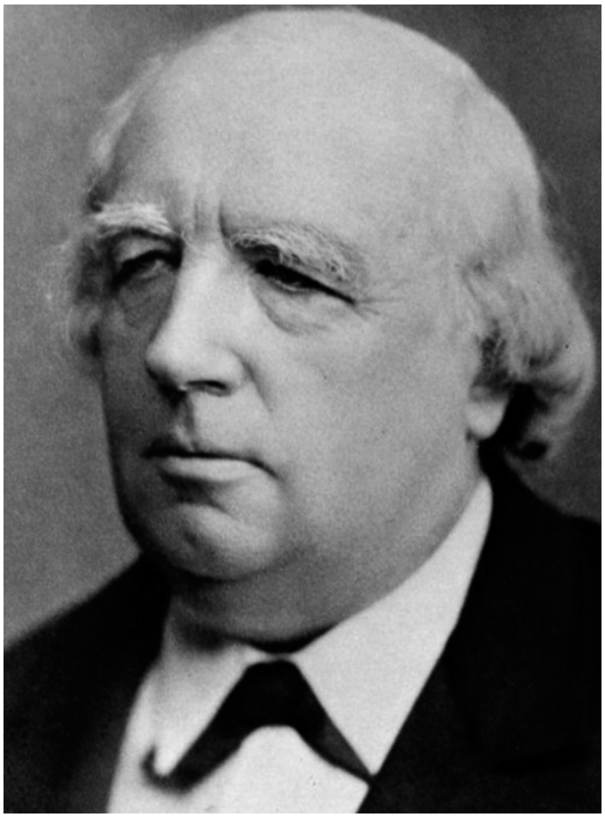


Figura 6.6: Karl Weierstrass — Biblioteca da *Humboldt-Universität zu Berlin*, Alemanha.

desconhecia as ideias de Bolzano, é tido como o primeiro matemático a introduzir sistematicamente elementos de rigor no cálculo infinitesimal. Seus três livros publicados na década de 1820 colocaram a noção de limite no centro da teoria.

A grande contribuição para fundamentação do cálculo veio do analista alemão Karl Weierstrass (1815-1897), professor da Universidade Técnica de Berlim. Weierstrass procurou retirar todo apelo à intuição através da quantificação das definições. Traduziu em termos de desigualdades numéricas expressões do tipo "uma variável se aproxima infinitamente de um valor fixo". Weierstrass estabeleceu definições rigorosas de limite e de continuidade em termos de ϵ e δ, da forma como conhecemos hoje:

Se for possível determinar um limite δ tal que, para todo valor h menor em valor absoluto que δ, $f(x+h)-f(x)$ seja menor que uma quantidade ϵ, tão pequena quanto se queira, então dizemos que fizemos corresponder a uma variação infinitamente pequena da variável uma variação infinitamente pequena da função.

O formalismo proposto por Weierstrass deu à análise feições muito próximas das que ela tem hoje.

A aritmetização da análise proposta por Weirstrass, no entanto, esbarrou na barreira da falta de uma definição rigorosa de número. O tema, que ganhara a última contribuição efetiva no Livro V dos Elementos de Euclides, permaneceu negligenciado por séculos. Os matemáticos alemães Eduard Heine (1821-1881) e o Georg

Cantor (1845-1918) — que nasceu em São Petersburgo, mas viveu na Alemanha toda sua vida adulta — publicaram em 1872 no *Journal* de Crelle um artigo em que propuseram a construção dos números reais através de limites de sequências convergentes. Essencialmente, os números irracionais seriam definidos como sequências convergentes sem limite racional.

Uma segunda proposta de construção formal dos números reais foi lançada por Richard Dedekind (1831-1916), que nasceu e viveu a maior parte de sua vida na cidade alemã de Braunschweig, mesma cidade natal de Gauss. Dedekind investigou a natureza do contínuo, percebendo que a essência da continuidade em um segmento de reta estava na possibilidade de, por um dado ponto, dividi-lo em duas partes em que apenas uma delas contivesse o ponto em questão. Dedekind propôs então uma construção dos números irracionais, tendo como ponto de partida os racionais, através de operações que chamou de *cortes*. A construção foi apresentada em seu livro *Stetigkeit und di Irrationalzahlen* (Continuidade e números irracionais), publicado em 1872, mesmo ano do trabalho de Cantor e Heine.

Um *corte* (C_1, C_2) é uma partição de $\mathbb{Q}$ em dois subconjuntos C_1, C_2, (ou seja $C_1 \cup C_2 = \mathbb{Q}$ e $C_1 \cap C_2 = \emptyset$) tal que todo elemento de C_1 é estritamente inferior a todos elemento de C_2. Os cortes determinados por números racionais possuem a seguinte propriedade: ou bem existe um maior elemento em C_1 ou bem existe um menor elemento em C_2. Existem cortes que não satisfazem essa propriedade. Por exemplo, tomamos C_1 como o conjunto formado pelos racionais negativos e pelos racionais não-negativos cujo quadrado é menor que 2, enquanto C_2 é formado pelos demais racionais positivos. Um corte (C_1, C_2) que não satisfaz essa propriedade determina um número irracional. No caso do exemplo, o número determinado é $\sqrt{2}$.

Dedekind definiu uma relação de ordem entre os cortes e verificou propriedades que fazem de $\mathbb{R}$ um corpo totalmente ordenado. Por fim, demonstrou que não era possível estender $\mathbb{R}$, ou seja, a repetição das operações de cortes com os elementos de $\mathbb{R}$ produziria novamente $\mathbb{R}$. Essa propriedade hoje é chamada de *completude*. O trabalho de Dedekind, pela primeira vez na história, apresentou uma definição satisfatória para a noção de contínuo. Seu método de cortes ou formulações axiomáticas equivalentes passaram a figurar nos fundamentos da teoria da análise.

Um próximo capítulo na formalização da aritmética foi escrito pelo italiano Giuseppe Peano (1958-1932), professor na Universidade de Turim. Peano propôs desenvolver uma linguagem formal que contivesse a lógica assim como as principais áreas da matemática. Dentre os símbolos introduzidos por Peano, estão $\in$, $\exists$, $\supset$, $\cap$ e $\cup$, hoje largamente empregados. Inspirado em Dedekind, Peano formulou em 1899 um sistema simples de axiomas para definir os números inteiros. Partiu de três conceitos primitivos: zero, número e a relação “ser sucessor de”. Esses elementos eram definidos pelos hoje denominados *axiomas de Peano:*

1) Zero é um número.

2) Se a é um número, então o sucessor de a é um número.

3) Zero não é o sucessor de nenhum número.

4) Dois números cujos sucessores são iguais também são iguais.

5) Se um conjunto S de números contém zero e também o sucessor de todos os números em S, então S contém todos os números (axioma de indução).

Estes axiomas, expostos aqui em forma literal, foram apresentados por Peano com uma formulação simbólica. A construção rigorosa de Peano estruturou as muitas construções em álgebra e em análise assentadas sobre a aritmética. Em particular, deu bases sólidas para as construções de números reais de Dedekind e de Cantor-Heine, que tinham sua raiz nos números racionais e, em última instância, nos números naturais.

6.8 Exercícios

1. Tendo em mente a definição moderna de função, faça uma crítica à definição de função de Euler. Dê exemplos de funções que não se enquadram na definição de Euler.

2. Busque em um texto de equações diferenciais definições e exemplos de equações lineares, exatas e homogêneas, definidas por Euler. Recorde os métodos de solução das equações lineares e das exatas.

3. Compare a definição de limite de d'Alembert com a definição moderna (usando ϵ e δ). Discuta porque sua definição é insatisfatória.

4. Compare a definição de função contínua de Cauchy com a definição moderna, usando limites.

5. Procure, em algum livro de Cálculo ou de Análise, o critério de Cauchy de convergência de sequências. Compare com o que é dito por Cauchy em sua definição sobre convergência de séries.

6. Em uma superfície, uma geodésica é uma curva que minimiza a distância entre dois pontos. Em uma esfera, as geodésicas estão contidas nos círculos máximos (ou seja, círculos que passam por pontos diametralmente opostos da esfera). Um triângulo geodésico é um triângulo cujas arestas são geodésicas, enquanto ângulo entre duas geodésicas é definido como sendo o ângulo entre suas retas tangentes. Encontre exemplos, na esfera, de triângulos geodésicos cujos ângulos internos têm soma maior que 180°.

7. Usando a relação de ordem dos números racionais, defina uma relação de ordem "$\leq$" entre os cortes de Dedekind. Mostre que essa ordem é total. Ou seja, para todos os cortes a, b, e c valem:

   (i) ou $a \leq b$ ou $b \leq a$;

   (ii) se $a \leq b$ e $b \leq a$ então $a = b$;

   (iii) se $a \leq b$ e $b \leq c$ então $a \leq c$ (transitividade).

8. Verifique que o conjunto que você conhece como $\mathbb{N}$ satisfaz os axiomas de Peano. Explique porque os conjuntos $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}_{\geq 0} = \{r \in \mathbb{Q}; r \geq 0\}$ não satisfazem esses axiomas.

REFERÊNCIAS

[Bar] John D. Barrow. *Pi in the sky — counting, thinking and being*. Cambridge, Oxford University, 1992.

[BoM] Carl B. Boyer & Uta C. Merzbach. *A history of mathematics*. 3ª ed. Hoboken, John Wiley & Sons, 2011.

[Caj] Forian Cajori. *A history of mathematical notations*. New York, Dover Publications, Inc., 1993.

[Cau] Augustin Louis Cauchy. *Leçons sur le calcul différentiel*. Paris, Chez de Bure Frères, 1829.

[Dav] Norman Davies. *Europe — a history*. Oxford, Oxford University Press, 1996.

[Des] René Descartes. *The Geometry of René Descartes*. Traduzido do francês e do latim por David E. Smith e Marcia L. Latham. New York, Dover Publications, 1954.

[DPe] Amy Dahan-Dalmedico & Jeanne Peiffer. *Une histoire des mathématiques — routes et dédales*. Paris, Éditions du Seuil, 1986.

[Euc] Euclides. *Os elementos*. Traduzido por Irineu Bicudo. São Paulo, Editora Unesp, 2009.

[Eve] Howard Eves. *Introdução à história da matemática*. Campinas, Editora Unicamp, 2004.

[Fie] J. V. Field. *The invention of infinity — mathematics and art in the renaissance*. New York, Oxford University Press, 1997.

[Fla] Graham Flagg. *Numbers — their history and meaning*. Dover Publications, 2002.

[Gal] Galileu Galilei. *O ensaiador*. Coleção Os Pensadores. São Paulo, Nova Cultural, 1996.

[Gra] Eduard Grant. *A sourcebook in medieval science*. Cambridge, Harvard University Press, 1974.

[Hea] Sir Thomas L. Heath. *A manual of greek mathematics*. New York, Dover Publications Inc., 2003.

[Lin] David C. Lindbert (editor). *Science in the middle ages*. Chicago, The University of Chicago Press, 1978.

[Ifr] Georges Ifrah. *Os números — a história de uma grande invenção*. São Paulo, Globo, 2005.

[Lyo] Jonathan Lyons. *A Casa da Sabedoria — como a valorização do conhecimento pelos árabes transformou a civilização ocidental*. Rio de Janeiro, Zahar, 2011.

[Men] Karl Meninger. *Number words and number systems — a cultural history of numbers*. Dover Science, 1992.

[Pai] Ana Paula M. Paiva. *A aventura do livro experimental*. Belo Horizonte, Autêntica Editora, 2010.

[Sig] Laurence Sigler. *Fibonacci's Liber Abacci — Leonardo de Pisano's book of calculation*. New York, Springer Verlag, 2002.

[Sil] Jairo José da Silva. *Filosofias da matemática*. São Paulo, Editora Unesp, 2007. New York, Springer Verlag, 2002.

[Smi] David E. Smith. *History of mathematics*. Vol I e II. New York, Dover Publications, 1958.

[Str] Dirk J. Struik. *A concise history of mathematics*. 4ª ed. New York, Dover Publications, Inc., 2002.

[Wen] Sister Wendy Beckett. *Sister Wendy's story of painting*. New York, DK Publishing, 1994.

Composto em caracteres Aller, Arial, Calibri, PT Sans e Times New Roman.
Editorado pelo Centro de Apoio à Educação a Distância da UFMG (CAED-UFMG).
Capa em Supremo, 250g, 4 X 0 cores - Miolo couchê fosco 90g, 2X2 cores.
2013